سلسلة هباج

BAC

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

الجزء 2

3e Année Secondaire : Mathématiques

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هبـــاج

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـــاذج للبكالوريا

الجزء الثاني

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ــ رياضيات ــ علوم تجريبية

الإشتقاقيــــة

العدد المشتق و الدالة المشتقة :

تعريف : f دالة معرفة على مجال I جزئي من IR . يشمل العددان a و $a+h$ حيث $h \in R$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a إذا و فقط إذا كانت للنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0 نهاية محدودة .

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بـــ $f'(a)$

ملاحظة (1) يمكن كتابة النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ بوضع $x = a + h$ فإن $h = x - a$

إذن : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ملاحظة (2) : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة الأولى . f' معرفة بــ : $f' : x \longmapsto f'(x)$

مثـــال : $f(x) = x^2 + 1$

ليكن a عدد حقيقي كيفي . هل f قابلة للاشتقاق عند a ؟

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2+1-a^2-1}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} (x+a)$$
$$= \lim_{x \to a} a+a$$
$$= 2a$$

بما أن $2a \in IR$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a) = 2a$

نتيجة : الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f' : a \longmapsto 2a$ و خاصة $f' : x \longmapsto 2x$

إذن : $f'(x) = 2x$

التفسير الهندسي للعدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I . (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $x_0 \in I$ فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(x_0 ; f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته $y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$

المشتقات من الدرجة n $(n \in IN^*)$

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى . إذا قبلت الدالة f' بدورها الاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة الأولى تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـــ f''

إذن بهذه الطريقة يمكن تعريف دوال مشتقة من الدرجة 3 ؛ 4 ؛ 5 .... و نرمز لها بـــ f''' ؛ f'''' و عامة $f^{(n)}$

مثال : $f(x) = x^4$ إذن : $f'(x) = 4x^3$

و $f''(x) = 12x^2$

و $f'''(x) = 24x$

و $f^{(4)}(x) = 24$

نشاط (1)

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة 'f معرفة بـ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

نعرف الدالة h على IR بـ $h(x) = f(2x - 1)$

أحسب $h'(x)$ دون تعيين $h(x)$

الحـل :

لنعرف الدالة u كمايلي : $u : x \longmapsto 2x - 1$ منه $u' : x \longmapsto 2$

إذن : $h(x) = f(2x - 1) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

منه :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times (f'(u(x))) \\ &= 2 \times f'(2x - 1) \\ &= 2 \times \frac{1}{(2x-1)^2 + (2x-1) + 1} \\ &= \frac{2}{4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 + 1} \\ &= \frac{2}{4x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

إتجاه تغير دالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

إذا كان $f'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على I

إذا كان $f'(x) < 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I

إذا كان $f'(x) = 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f ثابتة على I

القيم الحدية المحلية لدالة على مجال

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \le f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى محلية على المجال I للدالة f

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \ge f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى محلية على المجال I للدالة f

مبرهنة :

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل العدد x_0

إذا كان $f'(x_0) = 0$ و 'f تغير إشارتها حول x_0 فإن $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية للدالة f على المجال I

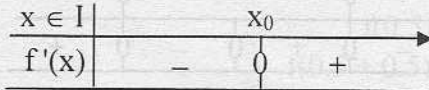
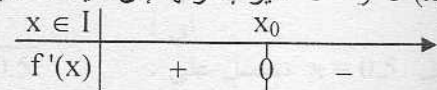
تفسير :

$f'(x_0) = 0$ و 'f تغير إشارتها إذن لدينا الحالتين التاليتين :

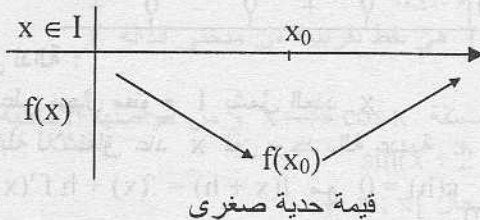
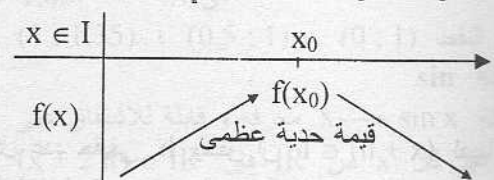
$x \in I$		x_0	
$f'(x)$	+	0	−

'f تغير إشارتها من + إلى -

أو

$x \in I$		x_0	
$f'(x)$	−	0	+

'f تغير إشارتها من - إلى +

إذن : جدول التغيرات يكون كالتالي :

أو

مشتقات بعض الدوال المركبة

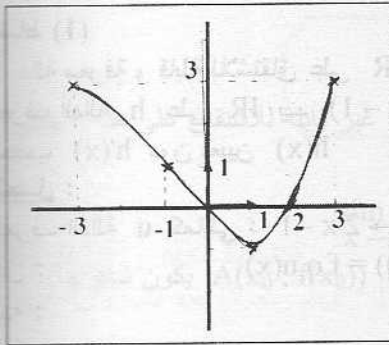
u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

مشتقة الدالة $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ هي $x \longmapsto u'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x) > 0$

مشتقة الدالة $x \longmapsto [u(x)]^n$ هي $n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$: n عدد طبيعي أكبر من 1

مشتقة الدالة $x \longmapsto \sin(u(x))$ هي $u'(x) \times \cos(u(x))$

مشتقة الدالة $x \longmapsto \cos(u(x))$ هي $-u'(x) \times \sin(u(x))$

نشاط :

إليك التمثيل البياني لدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[-1 ; 3]$

1 ــ أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1 ; 3]$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1 ; 3]$

2 ــ لنعتبر دالة عددية f على المجال $[-1 ; 3]$ معرفة بـ $f(x) = [g(x)]^2$

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$

الحــل :

1 ــ جدول تغيرات الدالة g على $[-1 ; 3]$

من منحنى الدالة g نلاحظ أن : g متناقصة على المجال $[-1 ; 1]$ و متزايدة على المجال $[1 ; 3]$ و $g(-1) = 1$ ؛ $g(1) = -1$ ؛ $g(3) = 3$ ؛ $g(0) = 0$ و $g(2) = 0$

منه : جدول التغيرات التالي :

x	-1		0		1		2		3
g'(x)		−			0		+		
g(x)	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3

نتيجة : جدول إشارة $g'(x)$:

x	-1		1		3
g'(x)		−	0	+	

جدول إشارة $g(x)$:

x	-1		0		2		3
g(x)		+	0	−	0	+	

2 ــ لدينا : $f(x) = [g(x)]^2$

إذن : $f'(x) = 2 \times g'(x) \times g(x)$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g'(x) \times g(x)$ كمايلي :

x	-1		0		1		2		3
g'(x)		−		−	0	+		+	
g(x)		+	0	−		−	0	+	
g'(x) × g(x)		−	0	+	0	−	0	+	

خلاصة : جدول إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1 ; 3]$:

x	-1		0		1		2		3
f'(x)		−	0	+	0	−	0	+	

التقريب التآلفي لدالة :

f دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل العدد x

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x فإن يوجد دالة عددية ε حيث من أجل كل عدد حقيقي h يحقق أن $(x + h) \in I$ لدينا : $f(x + h) = f(x) + h f'(x) + h\,\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ أي من أجل h قريب من الصفر فإن :

$f(x + h) = f(x) + h f'(x)$ لأن $h \times \varepsilon(h) = 0$

في هذه الحالة العدد $f(x) + h f'(x)$ يسمى التقريب التآلفي لــ $f(x + h)$ من أجل h يقترب من 0 مرفق بالدالة f

ملاحظة : إذا وضعنا $\Delta_x = (x + h) - x$ و $\Delta_y = f(x + h) - f(x)$ فإن المساواة $f(x + h) = f(x) + h f'(x) + h\,\varepsilon(h)$

تصبح $f(x + h) - f(x) = h f'(x) + h\,\varepsilon(h)$

أي : $\Delta_y = f'(x)\,\Delta_x + \varepsilon(\Delta_x)\,.\,\Delta_x$ لأن $\left\{\begin{array}{l}\Delta_y = f(x + h) - f(x)\\ \Delta_x = (x + h) - x = h\end{array}\right.$

إذن : $\Delta y = f'(x)\,\Delta_x$ لما Δ_x يقترب من 0

نضع إصطلاحا الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ أي $dy = f'(x)\,dx$

إذن بصفة عامة الرمز $\frac{df}{dx}$ يستعمل بدلا من $f'(x)$

مثلا : $\frac{d^2 f}{dx^2}$ بدلا من $f''(x)$ و $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}(x)$

طريقة أولر لتقريب دالة

الهدف من طريقة أولر هو البحث عن صور أعداد حقيقية متتابعة حيث يكون الفرق بينها عدد حقيقي h يؤول إلى 0 و ذلك بتطبيق التقريب التآلفي لدالة f كمايلي :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل العدد x_0 و h عدد حقيقي يؤول إلى 0

نضع : $x_1 = x_0 + h$ ؛ $x_2 = x_1 + h$ ؛ $x_3 = x_2 + h$ ؛ .... $x_n = x_{n-1} + h$

حيث كل الأعداد x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 ؛ ..... x_n تنتمي إلى المجال I

إذن : بتطبيق التقريب التآلفي للدالة f على المجال I نحصل على :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0)$$
$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h f'(x_1)$$
$$f(x_3) = f(x_2 + h) = f(x_2) + h f'(x_2)$$
$$\vdots$$
$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h) = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$$

بهذه الطريقة يمكن تعيين النقط $A_0(x_0 ; f(x_0))$ ؛ $A_1(x_1 ; f(x_1))$ ؛ $A_2(x_2 ; f(x_2))$ ؛ .... $A_n(x_n ; f(x_n))$ و عند الربط بين هذه النقط نحصل على تمثيل بياني تقريبي لمنحنى الدالة f على المجال I كلما إقترب h من 0

ملاحظة : العدد h يسمى الخطوة

نشاط :

f **دالة تحقق** $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

باستعمال طريقة أولر من أجل الخطوة $h = 0,5$ أحسب $f(0,5)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f(1,5)$

الحــل :

التقريب التآلفي للدالة f هو من الشكل : $f(x + h) = f(x) + h f'(x)$

و من أجل $h = 0.5$ نحصل على : $f(x + 0.5) = f(x) + h f'(x)$

بما أن $f'(x) = \sqrt{x}$ نعتبر المجال $[0 ; 2]$

من أجل $x = 0$ نحصل على : $f(0 + 0.5) = f(0) + 0.5\sqrt{0}$

أي : $f(0.5) = 1 + 0 = 1$

من أجل $x = 0.5$ نحصل على : $f(0.5 + 0.5) = f(0.5) + 0.5\sqrt{0.5}$

أي : $f(1) = 1 + 0.5\sqrt{0.5} \approx 1.35$

من أجل $x = 1$ نحصل : $f(1 + 0.5) = f(1) + 0.5\sqrt{1}$

أي : $f(1.5) = 1.35 + 0.5 = 1.85$

إذن النقط $(0 ; 1)$ ؛ $(0.5 ; 1)$ ؛ $(1 ; 1.35)$ ؛ $(1.5 ; 1.85)$ هي نقط تقريبية من منحنى الدالة f

الدالة sin

الدالة $x \longmapsto \sin x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $x \longmapsto \cos x$ و من خواصها الأساسية مايلي :

من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

إذن : الدالة sin دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; \pi]$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\sin(-x) = -\sin x$

إذن الدالة sin فردية أي منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
cos x		−	0	+	0	−	
sin x	0	↘	−1	↗	1	↘	0

الدالة cos

الدالة $x \longmapsto \cos x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $x \longmapsto -\sin x$

و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

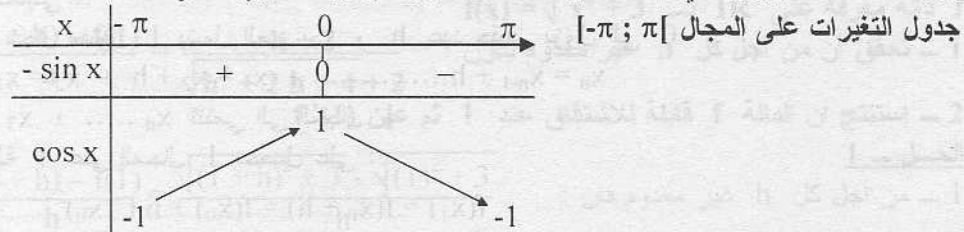
إذن الدالة cos دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; \pi]$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\cos(-x) = \cos x$

إذن الدالة cos زوجية أي منحناها يقبل حامل محور التراتيب كمحور تناظر

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		0		π
$-\sin x$		+	0	−	
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

الدالة tan

الدالة $x \longmapsto \tan x$ معرفة من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث k عدد صحيح لأن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

إذن معرفة من أجل $\cos x \neq 0$

و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(x + \pi) = \tan x$

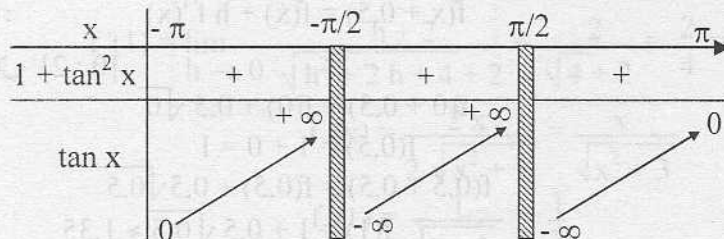
إذن الدالة tan دورية و دورها π إذن يكفي دراستها على المجال $]-\pi ; 0]$

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(-x) = -\tan x$

إذن الدالة tan فردية منه منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن الدالة tan قابلة للاشتقاق عند x و دالتها المشتقة $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$ إذن موجبة تماما .

جدول التغيرات على المجال $]-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$1 + \tan^2 x$		+	‖	+	‖	+	
$\tan x$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

$$\tan(-\pi) = \frac{\sin(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -\pi/2} \cos x = 0^-$$ لأن $$\lim_{x \underset{<}{\to} -\pi/2} \tan x = \lim_{x \underset{<}{\to} -\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -\pi/2} \tan x = \lim_{x \underset{>}{\to} -\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \pi/2} \tan x = \lim_{x \underset{<}{\to} \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} \pi/2} \tan x = \lim_{x \underset{>}{\to} \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = -\infty$$

نشاط :

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \sin^2 x$ و (C) منحناها في معلم متعامد $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ـــ بين أن الدالة f دورية و دورها π

2 ـــ بين أن حامل محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

4 ــ أرسم المنحنى (C) على $[0 ; \pi/2]$ ثم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

الحــل :

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(x + \pi) \in IR$ و $\sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن : $f(x + \pi) = f(x)$ منه f دورية و دورها π

2 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن : $f(-x) = f(x)$ منه f دالة زوجية إذن : محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ــ f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi/2]$ و دالتها المشتقة $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

إذن : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0 ; \pi/2[$ لأن $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$

منه جدول التغيرات :

x	0		$\pi/2$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

4 ــ **طريقة الرسم :**

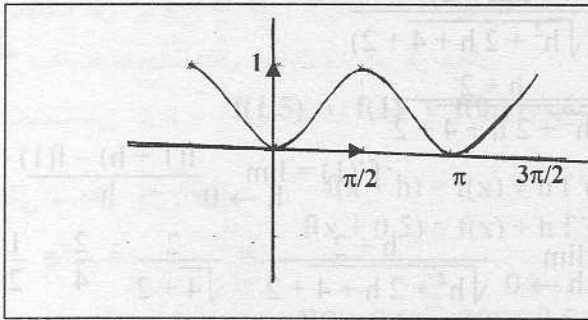
✓ نرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[0 ; \pi/2]$

✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب (دالة زوجية) نرسم المنحنى على $[-\pi/2 ; 0]$

✓ بإجراء سحب المنحنى على المجال $[-\pi/2 ; \pi/2]$ بخطوة قدرها π (الدالة دورية و دورها π) نحصل على المنحنى (C) على المجال

$\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

1 ــ تحقق أن من أجل كل h غير معدوم يكون : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$

2 ــ إستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ثم عين $f'(1)$

الحـل ــ 1

1 ــ من أجل كل h غير معدوم فان :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\sqrt{(1)^2+3}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}\times\frac{\sqrt{h^2+2h+4}+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$
$$=\frac{h^2+2h+4-4}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$
$$=\frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$
$$=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

2 ــ نعلم أن : $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

إذن :
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

تحقيق :
$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

إذن :
$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$$

التمرين ــ 2

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=|x|$. اثبت أن f لا تقبل الاشتقاق عند 0

الحـل ــ 2

ليكن $h\in IR$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

نميز حالتين كمايلي :

الأولى : $\lim_{h\overset{>}{\to}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\overset{>}{\to}0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\overset{>}{\to}0}\frac{h}{h}=1$ لأن $\lim_{h\overset{>}{\to}0}|h|=h$

الثانية : $\lim_{h\overset{<}{\to}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\overset{<}{\to}0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\overset{<}{\to}0}\frac{-h}{h}=-1$ لأن $\lim_{h\overset{<}{\to}0}|h|=-h$

نتيجة : النسبة $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ لا تقبل نهاية لما يؤول h إلى 0

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

<u>التمرين ــ 3</u>

f دالة قابلة للاشتقاق عند (1-) حيث $f'(-1) = 2$

علما أن المنحنى الممثل للدالة f في معلم يمر بالنقطة $A(-1\,;-3)$ ، أكتب معادلة لمماس هذا المنحنى عند النقطة A

<u>الحـل ــ 3</u>

النقطة $A(-1\,;-3)$ تنتمي إلى منحنى الدالة f إذن : $f(-1) = -3$

نعلم أن معادلة مماس المنحنى عند نقطة ذات الفاصلة (1 -) تكتب من الشكل :

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

أي : $y = 2(x+1) + (-3)$

أي : $y = 2x - 1$ و هي معادلة المماس المطلوبة .

<u>التمرين ــ 4</u>

(C) منحنى بياني لدالة f معرفة على IR و قابلة للإشتقاق عند 0

المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ هو مماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0\,;2)$

1 ــ حدد $f(0)$ ؛ $f'(0)$

2 ــ فسر هندسيا النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$ ثم برر وجودها و عين قيمتها

<u>الحـل ــ 4</u>

1 ــ النقطة $A(0\,;2)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(0) = 2$

مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة $y = 2 - 3x$ أي ميله هو 3 - منه $f'(0) = -3$

2 ــ النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$ تمثل ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 لأنها تكتب من الشكل

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (f(0) = 2 \text{ حيث})$$

إذن : هذه النهاية موجودة لأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و قيمتها $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-2}{x} = f'(0) = -3$

<u>التمرين ــ 5</u>

إليك التمثيل البياني لدالة f و المستقيمات (T_1) و (T_2) مماسات له

1 ــ حدد القيم التالية : $f(0)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f'(1)$

2 ــ أكتب معادلة لكل من المستقيمين (T_1) و (T_2)

<u>الحـل ــ 5</u>

1 ــ من منحنى الدالة f نلاحظ أن النقط $A(0\,;2)$ و $B(1\,;2)$ تنتمي إلى المنحنى (C) للدالة f إذن : $f(0) = 2$ و $f(1) = 2$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $B(1\,;2)$ يوازي محور الفواصل إذن ميله معدوم أي $f'(1) = 0$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $A(0\,;2)$ مائل بزاوية θ

حيث $\tan\theta = \dfrac{-1}{1/2} = -2$

منه ميل المماس هو $f'(0) = -2$

نتيجة : $f'(1) = 0$ و $f'(0) = -2$

2 ــ (T_1) مماس لمنحنى الدالة f عند $A(0\,;2)$ إذن معادلته :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = -2x + 2$

(T_2) مماس لمنحنى الدالة f عند $B(1\,;2)$ إذن معادلته $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي $y = 2$ لأن $f'(1) = 0$

<u>التمرين ــ 6</u>

(C) تمثيل بياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2\,;3)$

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$

أكتب معادلة المستقيم (T)

<u>الحـل ــ 6</u>

المماس (T) يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$ إذن لهما نفس معامل التوجيه الذي يساوي 3/2 (a/b - من أجل معادلة مستقيم من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $b \neq 0$)

إذن : $f'(-2) = 3/2$

من جهة أخرى النقطة $A(-2\,;3)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(-2) = 3$

منه معادلة المماس (T) هي : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

أي : $y = \frac{3}{2}(x+2) + 3$

أي : $y = \frac{3}{2}x + 6$

تحقيق : هل $A(-2\,;\,3)$ تنتمي إلى (T) ؟

$\frac{3}{2}(-2) + 6 = -3 + 6 = 3$ محقق .

التمرين ـــ 7

(C) منحنى الدالة f المعرفة على R بـــ $f(x) = x^2 + |x-1|$

1 ـــ أثبت أن من أجل $h \neq 0$ فإن $\frac{f(1+h)-1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$

2 ـــ هل العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

3 ـــ أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال (2) ثم أكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

الحـــل ـــ 7

1 ـــ من أجل $h \neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(1+h)-1}{h} = \frac{(1+h)^2 + |1+h-1| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + 1 + |h| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + |h|}{h}$$

$$= \frac{h^2}{h} + \frac{2h}{h} + \frac{|h|}{h}$$

$$= h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2 ـــ بما أن العبارة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 لأن :

النهايتين مختلفتين
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

إذن العبارة $h + 2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل أيضا نهاية لما يؤول h إلى 0 .

3 ـــ التفسير الهندسي :

العبارة $h + 2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية لما h يؤول إلى 0 هذا يعني أن العبارة $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ لا تقبل نهاية لما h يؤول إلى 0

أي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

و لكن : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 3$ لأن $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = 1$

و $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 1$ لأن $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = -1$

أي الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين 1 و عددها المشتق هو 3
و تقبل الاشتقاق على يسار 1 و عددها المشتق هو 1

إذن المنحنى (C) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 أحدهما على اليمين و ميله 3 و الآخر على اليسار و ميله 1 معادلاتهما على الترتيب :

على اليمين : $y = 3(x-1) + f(1)$ أي $y = 3(x-1) + 1$ أي $2 - y = 3x$

على اليسار : $y = 1(x-1) + f(1)$ أي $y = x - 1 + 1$ أي $y = x$

التمرين ــ 8

f دالة معرفة على $[-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x+2}$

1 ــ أحسب $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(-2+h)}{h}$

2 ــ هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين (-2) ؟ فسر هندسيا

الحـل ــ 8

1 ــ

$$\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h)}{h} = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{-2+h+2}}{h}$$
$$= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{h}}{h}$$
$$= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$$
$$= +\infty$$

2 ــ بما أن : $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = +\infty$ (حسب السؤال الأول) لأن $f(-2) = 0$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين -2

هندسيا : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين -2 يوازي حامل محور التراتيب

التمرين ــ 9

I مجال جزئي من R يشمل العدد α . f دالة معرفة على I و قابلة للاشتقاق عند α حيث $f'(\alpha) = \ell$ مع $\ell \in R$

نعتبر الدالة g معرفة على المجال I بـ

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & : x \neq \alpha \\ \ell & : x = \alpha \end{cases}$$

1 ــ أثبت أن g مستمرة عند α

2 ــ من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ أكتب $f(x)$ بدلالة x و $g(x)$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

الحـل ــ 9

1 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق عند α و $f'(\alpha) = \ell$ إذن حسب التعريف فإن : $f'(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \ell$

لكن $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ إذن : $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell = g(\alpha)$ اذن : الدالة g مستمرة عند α

2 ــ من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ لدينا : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

أي : $(x - \alpha)\, g(x) = f(x) - f(\alpha)$

أي : $f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)\, g(x)$

3 ــ حسب السؤال (2) فإن : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha)\, g(x)$

$= \lim\limits_{x \to \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha)\, \ell$ لأن $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$

$= f(\alpha)$ لأن $\lim\limits_{x \to \alpha} (x - \alpha)\, \ell = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$ إذن : f دالة مستمرة عند α

التمرين ــ 10

لتكن f دالة معرفة على R بـ $f(x) = 3x + |x^2 - 4|$

1 ــ تحقق أن f مستمرة عند -2

2 ــ برهن أن من أجل $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$ فإن $\dfrac{f(-2+h) + 6}{h} = 3 + \dfrac{|h|}{h}(4 - h)$

3 ـــ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 - ؟

الحــل ـــ 10

1 ـــ $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} 3x + |x^2 - 4| = -6$

$f(-2) = 3(-2) + |(-2)^2 - 4| = -6$

نتيجة : $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$ إذن f مستمرة عند 2 -

2 ـــ ليكن $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$

$$\frac{f(-2+h)+6}{h} = \frac{3(-2+h) + |(-2+h)^2 - 4| + 6}{h}$$

$$= \frac{-6 + 3h + |4 - 4h + h^2 - 4| + 6}{h}$$

$$= \frac{3h + |h^2 - 4h|}{h}$$

$$= \frac{3h + |h| \times |h-4|}{h}$$

$$= 3 + \frac{|h|}{h} \times |h-4|$$

بما أن $h \in]-1/2 ; 0[\cup]0 ; 1/2[$ فإن $h - 4 < 0$ أي : $|h-4| = 4 - h$

منه : $\frac{f(-2+h)+6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$ و هو المطلوب

3 ـــ لدينا : $\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h)+6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ لأن $f(-2) = -6$

$= \lim_{h \to 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$ حسب السؤال (2)

إذن : نميز حالتين :

الأولى : $\lim_{h \overset{<}{\to} 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h) = 3 - 1(4-0) = -1$ لأن $|h| = -h$

الثانية : $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} 3 + \frac{|h|}{h}(4-h) = 3 + 1(4-0) = 7$ لأن $|h| = h$

نتيجة : $\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \neq \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 -

التمرين ـــ 11

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة التعريف للدالة ثم أحسب مشتقتها

1 ـــ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ 3 ـــ $h(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

2 ـــ $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ 4 ـــ $\ell(x) = \sqrt{x^2+4}$

الحــل ـــ 11

1 ـــ f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

2 ــ g معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{2x - (x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

3 ــ h معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \left(1 + \frac{0-1}{x^2}\right) \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

4 ــ ℓ معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\ell'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

التمرين ــ 12

عين في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة f على المجال D

1 ــ $f(x) = x + x\cos x$ ؛ $D = R$

2 ــ $f(x) = \cos x \sin x$ ؛ $D = R$

3 ــ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ؛ $D = R^*$

4 ــ $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ؛ $D =]0 ; \pi[$

5 ــ $f(x) = \frac{\cos x}{-1 + \sin x}$ ؛ $D = [0 ; \pi/2[$

6 ــ $f(x) = \cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$ ؛ $D = R$

7 ــ $f(x) = 3x\sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$ ؛ $D = R$

8 ــ $f(x) = (2x+4)^5$ ؛ $D = R$

9 ــ $f(x) = \sqrt{x - 4}$ ؛ $D =]4 ; +\infty[$

10 ــ $f(x) = \sqrt{-2x + 4}$ ؛ $D =]-\infty ; 2[$

الحــل ــ 12

1 ــ $f(x) = x + x\cos x$ إذن :

$$f'(x) = 1 + 1 \times \cos x - x\sin x$$
$$= 1 + \cos x - x\sin x$$

2 ــ $f(x) = \cos x \sin x$ إذن :

$$f'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x$$

3 — $f(x) = \frac{\sin x}{x}$: إذن $f'(x) = \frac{(\cos x) \times x - 1 \times \sin x}{x^2}$

$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

4 — $f(x) = \frac{1}{\sin x}$: إذن $f'(x) = \frac{0(\sin x) - \cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{- \cos x}{\sin^2 x}$

5 — $f(x) = \frac{\cos x}{- 1 + \sin x}$: إذن $f'(x) = \frac{- \sin x(- 1 + \sin x) - (0 + \cos x) \cos x}{(- 1 + \sin x)^2}$

$= \frac{\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(- 1 + \sin x)^2}$

$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(- 1 + \sin x)^2}$

$= \frac{- 1 + \sin x}{(- 1 + \sin x)^2}$

6 — $f(x) = \cos\left(- 3 x + \frac{5}{\pi}\right)$: إذن $f'(x) = - 3\left(- \sin\left(- 3 x + \frac{5}{\pi}\right)\right)$

$= 3 \sin\left(- 3 x + \frac{5}{\pi}\right)$

7 — $f(x) = 3 x \sin\left(- x + \frac{5}{\pi}\right)$: إذن $f'(x) = 3 \times \sin\left(- x + \frac{5}{\pi}\right) + 3 x \times \left(- \cos\left(- x + \frac{5}{\pi}\right)\right)$

$= 3 \sin\left(- x + \frac{5}{\pi}\right) - 3 x \cos\left(- x + \frac{5}{\pi}\right)$

8 — $f(x) = (2 x + 4)^5$: إذن $f'(x) = 2(2 x + 4)^4 \times 5 = 10(2 x + 4)^4$

9 — $f(x) = \sqrt{x - 4}$: إذن $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 4}}$

10 — $f(x) = \sqrt{- 2 x + 4}$: إذن $f'(x) = \frac{- 2}{2\sqrt{- 2 x + 4}} = \frac{- 1}{\sqrt{- 2 x + 4}}$

التمرين — 13

f دالة معرفة على IR بـ — $f(x) = \cos x$

1 — عين $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f^{(3)}(x)$ ؛ $f^{(4)}(x)$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2 — إستنتج حسب قيم العدد الطبيعي n غير المعدوم عبارة $f^{(n)}(x)$

الحل — 13

1 —

$f'(x) = - \sin x$

$f''(x) = - \cos x$

$f^{(3)}(x) = - (- \sin x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$

2 — لاحظ أن من أجل $n = 5$ فإن $f^{(5)}(x) = f'(x)$ لأن $f^{(4)}(x) = f(x)$

إذن : $\begin{cases} f^{(6)}(x) = f''(x) \\ f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x) \\ f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x) = f(x) \end{cases}$

و منه النتيجة التالية :

- ✓ إذا كان $n = 4 k$ فإن $f^{(n)}(x) = \cos x$ مع $k \in IN^*$
- ✓ إذا كان $n = 4 k + 1$ فإن $f^{(n)}(x) = - \sin x$ مع $k \in IN$
- ✓ إذا كان $n = 4 k + 2$ فإن $f^{(n)}(x) = - \cos x$ مع $k \in IN$
- ✓ إذا كان $n = 4 k + 3$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin x$ مع $k \in IN$

التمرين ــ 14

من أجل كل $x \in IR^*$ نعرف الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

نسمي $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ المشتقتان ذات الرتبة n للدالتين f و g على الترتيب حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n يكون من أجله $f^{(n)} = g^{(n)}$

الحــل ــ 14

لاحظ أن من أجل كل $x \in IR^*$ فإن : $g(x) = f(x) + x^2$

لنعرف الدالة h على IR^* بـــ $h(x) = x^2$

إذن : من أجل كل x من IR^* فإن $g(x) = f(x) + h(x)$

منه : من أجل كل x من IR^* فإن $g^{(n)}(x) = f^{n}(x) + h^{(n)}(x)$

إذن : يكون $g^{(n)} = f^{(n)}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل $x \in IR^*$: $h^{(n)}(x) = 0$

لدينا : $h'(x) = 2x$ و $h''(x) = 2$ و $h^{(3)}(x) = 0$

إذن : أصغر عدد طبيعي n يحقق $g^{(n)} = f^{(n)}$ هو $n = 3$

التمرين ــ 15

لتكن f و g دالتين معرفتين على IR بـــ $f(x) = \sin \theta x$ و $g(x) = \cos \theta x$ حيث θ عدد حقيقي غير معدوم

1 ــ بين أن $f''(x) = -\theta^2 f(x)$

2 ــ بين أن $g''(x) = -\theta^2 g(x)$

من أجل كل عددين حقيقيين a و b نضع $h(x) = a f(x) + b g(x)$

3 ــ بين أن $h''(x) = -\theta^2 h(x)$

الحــل ــ 15

1 ــ $f(x) = \sin \theta x$ إذن : $f'(x) = \theta \cos \theta x$

منه : $f''(x) = \theta(-\theta \sin \theta x)$

أي : $f''(x) = -\theta^2 \sin \theta x$

أي : $f''(x) = -\theta^2 f(x)$ و هو المطلوب

$g(x) = \cos \theta x$ إذن : $g'(x) = -\theta \sin \theta x$

منه : $g''(x) = -\theta(\theta \cos \theta x)$

أي : $g''(x) = -\theta^2 g(x)$ و هو المطلوب

2 ــ $h(x) = a f(x) + b g(x)$ إذن : $h''(x) = a f''(x) + b g''(x)$

أي : $h''(x) = a(-\theta^2 f(x)) + b(-\theta^2 g(x))$

أي : $h''(x) = -\theta^2(a f(x) + b g(x))$

أي : $h''(x) = -\theta^2 . h(x)$ و هو المطلوب

التمرين ــ 16

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$

1 ــ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\sqrt{1 + x^2} \times f'(x) = f(x)$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x : $(1 + x^2) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

الحــل ــ 16

1 ــ من أجل كل x من IR لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}$

أي : $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$

منه : $\sqrt{1 + x^2} \times f'(x) = f(x)$ و هو المطلوب

2 ــ لدينا من أجل كل x من IR : $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \times f'(x)$

ليكن $g(\alpha) = 0$
إذن : لما $x \in]-\infty ; \alpha[$ فإن $g(x) < 0$
لما $x = \alpha$ فإن $g(x) = 0$
لما $x \in]\alpha ; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$
منه جدول إشارة $f'(x)$ حيث $f'(x) = g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3 ـ جدول تغيرات الدالة f على IR

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

التمرين ـ 19

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$
1 ـ أدرس تغيرات الدالة f
2 ـ هل f تقبل قيم حدية محلية ؟
3 ـ هل f محدودة على IR ؟

الحـل ـ 19

1 ـ التغيرات : f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :
$f'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x+4)$ و اشارتها :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$6x(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	65	↘	1	↗	$+\infty$

$f(-4) = 2(-64) + 12(16) + 1 = 65$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :
f تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند -4 و قيمتها 65
f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند 0 و قيمتها 1
3 ـ الدالة f ليست محدودة على IR لأن إحدى نهايتها غير منتهية

التمرين ـ 20

n عدد طبيعي غير معدوم و f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = x^n$
1 ـ أدرس حسب قيم n تغيرات الدالة f
2 ـ ناقش حسب قيم n و a عدد حلول المعادلة $x^n = a$ حيث a ثابت حقيقي

الحـل ـ 20

1 ـ f وحيد حد من الدرجة n إذن معرف و قابل للاشتقاق على IR و مشتقة $f'(x) = n x^{n-1}$
إذن : f' من إشارة x^{n-1} لأن $n > 0$
نميز الحالتين التاليتين :

4 — $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

لاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $R - \{-1\}$

إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إتجاه تغير f	f متزايدة		f متزايدة

5 — $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{x^2}\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$ لأن $x \in]0 ; +\infty[$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ لأن $\frac{1}{x^2} > 0$

لدينا : $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 1$

يكافئ $\frac{1}{4}x \geq 1$ لأن الطرفين موجبين

يكافئ $x \geq 4$

منه جدول الاشارة التالي :

x	0		4		$+\infty$
$-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$		$-$	0	$+$	
إتجاه تغير f		f متناقصة		f متزايدة	

التمرين — 18

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

1 — أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 — إستنتج إشارة $f'(x)$ على IR

3 — أنجز جدول تغيرات الدالة f

الحـل — 18

1 — $f'(x) = 4 \times \frac{1}{12}x^3 + 3 \times \frac{1}{6}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$f''(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1$

$= x^2 + x + 1$

2 — لندرس تغيرات الدالة $g : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ $(g(x) = f'(x))$

لدينا : g معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$g'(x) = x^2 + x + 1$ و إشارتها :

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ إذن : لا تنعدم و تاخذ إشارة موجبة .

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

لدينا :
$$(f^{n+1})' = [f(x) \times f^n(x)]'$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x)[1 + n]$$
$$= (n+1) f'(x) \times f^n(x)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

حذار ! $f^n(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f

2 ـ ليكن $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

إذا كان $z \in IN$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأول

إذا كان $z \notin IN$ نضع $z = -n$ حيث $n \in IN$

من أجل $f(x) \neq 0$ فإن :
$$[f^z(x)]' = [f^{-n}(x)]'$$
$$= \left[\frac{1}{f^n(x)}\right]'$$
$$= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2}$$
$$= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)}$$
$$= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x)$$
$$= -n f'(x) \times f^{-n-1}$$
$$= z f'(x) \times f^{z-1} \quad \text{لأن} \quad z = -n$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

__التمرين ـ 23__

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :

1 ـ ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2 ـ نعرف على IR الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على IR

3 ـ أحسب $f(1)$ ؛ $f'(1)$ ؛ $g(1)$ ؛ $g'(1)$

4 ـ تحقق من الملاحظة المطروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

__الحل ـ 23__

1 ـ نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 ـ بما أن الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من IR

$x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على IR

بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على IR

3 ـ
$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$
$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

إذن :
$$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

2 ـ لتكن المعادلة $x^n = a$ حيث $a \in IR$

نميز حالتين :

الحالة (1) n فردي :

من أجل كل $a \in IR$ فإن المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا وحيدا على IR

الحالة (2) n زوجي :

من أجل $a < 0$ المعادلة $x^n = a$ لا تقبل أي حل في IR

من أجل $a = 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا واحدا و هو 0

من أجل $a > 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلين مختلفين في IR

التمرين ـــ 21

عين مشتقات الدوال التالية على IR :

1 ـ $f(x) = (x^3 - x + 1)^5$

2 ـ $g(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^8}$

3 ـ $h(x) = \cos^3 \theta x$ **حيث θ عدد حقيقي غير معدوم**

4 ـ $k(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$

الحل ـــ 21

1 ـ $f'(x) = 5(3x^2 - 1)(x^3 - x + 1)^4$

2 ـ $g'(x) = \dfrac{0 - 8(2x)(x^2+3)^7 \times 1}{(x^2+3)^{16}} = \dfrac{-16x(x^2+3)^7}{(x^2+3)^{16}}$

3 ـ $h'(x) = 3 \times (-\theta \sin \theta x) \times \cos^2 \theta x = -3\theta(\sin \theta x)(\cos^2 \theta x)$

4 ـ $k'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}} = \dfrac{-x}{(x^2+1)^2\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}}$

التمرين ـــ 22

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى

1 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

2 ـ برهن أنه يمكن تمديد هذه الخاصية إلى كل عدد صحيح غير معدوم z

الحل ـــ 22

1 ـ لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع على n كمايلي :

من أجل $n = 2$ لدينا : $(f^2(x))' = [f(x) \times f(x)]'$

$= f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x)$ حسب الخواص

$= 2 \times f'(x) \times f(x)$

$= 2 \times f'(x) \times f^{2-1}(x)$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

لنفرض أن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$ من أجل $n > 2$

هل $(f^{n+1}(x))' = (n+1) f'(x) \times f^n(x)$ ؟

لدينا :
$$(f^{n+1})' = [f(x) \times f^n(x)]'$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x)$$
$$= f'(x) \times f^n(x)[1+n]$$
$$= (n+1) f'(x) \times f^n(x)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

حذار ! $f^n(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f

2 ـ ليكن $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

إذا كان $z \in IN$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأول

إذا كان $z \notin IN$ نضع $z = -n$ حيث $n \in IN$

من أجل $f(x) \neq 0$ فإن :

$$[f^z(x)]' = [f^{-n}(x)]'$$
$$= \left[\frac{1}{f^n(x)}\right]'$$
$$= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2}$$
$$= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)}$$
$$= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x)$$
$$= -n f'(x) \times f^{-n-1}$$
$$= z f'(x) \times f^{z-1} \quad \text{لأن} \quad z = -n$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in Z - \{-1 ; 0 ; 1\}$

التمرين ـ 23

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :

1 ـ ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2 ـ نعرف على IR الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على IR

3 ـ أحسب $f(1)$ ؛ $f'(1)$ ؛ $g(1)$ ؛ $g'(1)$

4 ـ تحقق من الملاحظة المطروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

الحـل ـ 23

1 ـ نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 ـ بما أن الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من IR

$x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على IR

بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على IR

3 ـ
$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

إذن : $$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

إذن : $g'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

4 ــ بما أن $\left.\begin{matrix} f(1) = g(1) = 1 \\ f'(1) = g'(1) = 1/2 \end{matrix}\right\}$

فإن منحنيي الدالتين f و g لهما نفس المماس عند النقطة A(1 ; 1) و معادلته :

$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ أي $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

التمرين ــ 24

برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$ **3 ــ** $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

2 ــ $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ **4 ــ** $\sin x \approx x$

الحـل ــ 24

1 ــ لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = (1+x)^3$

إذن : f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = 3(1+x)^2$

منه : $f'(0) = 3$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة f هو : $x \longmapsto f'(0)(x-0) + f(0)$

أي : $x \longmapsto 3x + 1$

2 ــ لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = \frac{1}{1+x}$

g قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

منه : $g'(0) = -1$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة g هو : $x \longmapsto g'(0)(x-0) + g(0)$

أي : $x \longmapsto -x + 1$

3 ــ لتكن h دالة معرفة بـ $h(x) = \sqrt{1+x}$

h قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

إذن : $h'(0) = \frac{1}{2}$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة h هو : $x \longmapsto h'(0)(x-0) + h(0)$

أي : $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 1$

4 ــ لتكن ℓ دالة معرفة بـ $\ell(x) = \sin x$

ℓ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : $\ell'(x) = \cos x$

إذن : $\ell'(0) = \cos(0) = 1$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة ℓ هو : $x \longmapsto 1(x-0) + \ell(0)$

أي : $x \longmapsto x$

التمرين ــ 25

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2$

1 ــ عين التقريب التآلفي لعبارة $f(2+h)$ من أجل h قريب من 0

2 ــ أحسب بهذا التقريب قيمة مقربة لـ $(2,029)^2$

الحـل ــ 25

1 ــ f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 2 و دالتها المشتقة $f'(x) = 2x$

إذن : $f'(2) = 2(2) = 4$

منه : التقريب التآلفي المحلي عند 2 للدالة f هو : $x \longmapsto 4(x-2) + f(2)$

أي : $x \longmapsto 4x - 8 + 4$

أي : $x \longmapsto 4x - 4$

نتيجة : $f(x) \approx 4x - 4$
يقارب

إذن : $f(2+h) \approx 4(2+h) - 4$ من أجل h يقترب من 0

أي : $f(2+h) \approx 4h + 4$ من أجل h يقترب من 0

2 ــ لاحظ أن : $(2{,}029)^2 = f(2 + 0{,}029)$

نضع $h = 0{,}029$ إذن h يقترب من 0

منه $f(2 + 0{,}029) \approx 4h + 4$

أي $f(2 + 0{,}029) \approx 4(0{,}029) + 4$

أي $f(2{,}029) \approx 4{,}116$

التمرين ــ 26

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر (C) منحنى دالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فاصلة النقطة A و ليكن (T) مماس للمنحنى(C) عند النقطة A . B و C نقطتان من (C) فاصلتهما على الترتيب $x_0 - h$ و $x_0 + h$ حيث $h > 0$ و h يقترب من 0 ،

D نقطة من المستوي حيث (AD) يعامد (CD) (أنظر الشكل) .

1 ــ أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD باعتباره مثلث قائم في D بدلالة $f'(x_0)$ و h .

2 ــ أحسب قيمة هذه المساحة من أجل $h = 0{,}03$ و معامل توجيه المستقيم (T) يساوي 9 .

الحـل ــ 26

1 ــ f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 إذن تقبل تقريب تآلفي من أجل x يقترب من x_0 من الشكل :

$$x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

بما أن h يقترب من 0 فإن $(x_0 + h)$ و $(x_0 - h)$ يقتربان من x_0 و عليه فإن حسب التقريب التآلفي للدالة f في جوار x_0 لدينا :

$$(1) \ldots\ldots\ f(x_0 + h) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) = h\,f'(x_0) + f(x_0)$$

و $$(2) \ldots\ldots\ f(x_0 - h) = f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + f(x_0) = -h\,f'(x_0) + f(x_0)$$

حسب الشكل فإن مساحة المثلث القائم BCD هي : $S = \frac{1}{2} BD \times DC$ حيث [BD] هي القاعدة و [DC] هو الإرتفاع

لدينا احداثيات النقط B ; C ; D كمايلي : $B(x_0 - h\,;\,f(x_0 - h))$ ؛ $C(x_0 + h\,;\,f(x_0 + h))$

$D(x_0 + h\,;\,f(x_0 - h))$ لأن D على نفس الإستقامة مع B

منه : $DB = (x_0 + h) - (x_0 - h) = 2h$

و $DC = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = [h\,f'(x_0) + f(x_0)] - [-h\,f'(x_0) + f(x_0)]$ حسب العلاقتين (1) و (2)

$$= 2h\,f'(x_0)$$

نتيجة : $S = \frac{1}{2} BD \times DC$ أي $S = \frac{1}{2} 2h \times 2h\,f'(x_0)$

أي : $S = 2h^2 f'(x_0)$ و هو المطلوب

2 ــ معامل توجيه (T) هو 9 أي $f'(x_0) = 9$

منه : $S = 2(0{,}03)^2 \times 9$

أي : $S = 18(0{,}0009)$

أي : $S = 0{,}0162$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

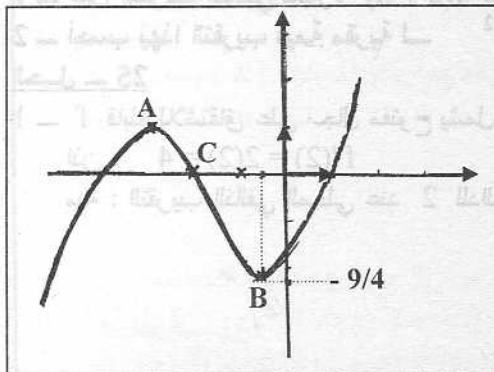
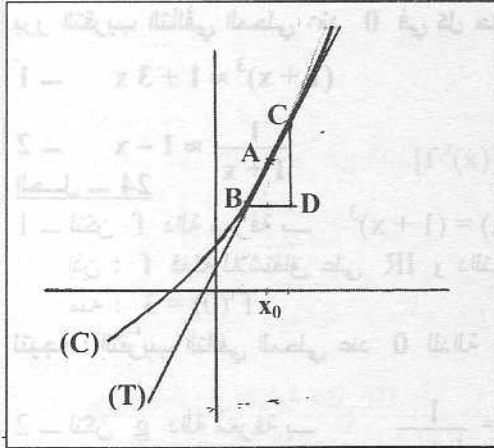
التمرين ــ 27

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

1 ــ عين العدد المشتق للدالة f عند كل من 3- ؛ 1/2- علما أن ترتيب النقطة B هو 9/4 -

2 ــ إستنتج معادلات المماسات للمنحنى (C) عند النقط A ; B

3 ــ هل توجد مماسات أخرى للمنحنى(C) موازية للمماس عند النقطة(A)

الحـل ــ 27

1 ــ حسب منحنى الدالة f فإن كل من النقط A و B هي ذروات محلية للمنحنى (C) .
إذن : تراتيبها هي قيم حدية محلية للدالة f و عليه فالمشتقة تنعدم عند
فواصل هذه النقط أي : $f'(-1/2) = f'(-3) = 0$
2 ــ معادلات المماسات عند A و B هما على الترتيب $y = 1$ و $y = -9/4$ لأنهما يوازيان حامل محور الفواصل .
3 ــ حسب المنحنى لا يوجد اي مماس اخر للمنحنى (C) يوازي المماس عند A أو B

التمرين ــ 28

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند 0 :

1 ــ $f(x) = x\sqrt{x}$

2 ــ $g(x) = x|x|$

3 ــ $h(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$

الحـل ــ 28

1 ــ f ليست معرفة على يسار 0 إذن لا تقبل الاشتقاق عند 0
فهل هي قابلة للاشتقاق على يمين 0 ؟

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$$

إذن : f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق $f'(0) = 0$

2 ــ
$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

إذن : g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = 0$

3 ــ
$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$$
$$= \lim_{x \to 0} x \sin \pi$$
$$= 0$$

إذن : h قابلة للاشتقاق عند 0 و $h'(0) = 0$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بـ
$$f(x) = \begin{cases} 0 : & x = 0 \\ x^2 \cos(1/x) : & x \neq 0 \end{cases}$$

1 ــ هل f قابلة للاشتقاق عند 0 (باستعمال التعريف)

2 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$

الحـل ــ 29

1 ــ
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos(1/x) - 0}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} x\cos(1/x)$$
$$= 0 \quad \text{لأن} \quad -1 \le \cos(1/x) \le 1$$

منه : f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 0$

2 ــ من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x^2\cos(1/x)$

إذن :
$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left[-\frac{1}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$
$$= 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$$

التمرين — 30

(C) منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x) = |x^2 - 1|$

1 — بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليمين

2 — بين أن f قابلة للاشتقاق على يسار 1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليسار

3 — هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 - ؟

4 — أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

الحـل — 30

1 —
$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1 - x^2}{x + 1}$$

لأن :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	−	0	+
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$

إذن :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} -1} 1 - x$$
$$= 2$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يمين 1 - و عددها المشتق على اليمين هو 2

2 —
$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} x - 1$$
$$= -2$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يسار 1 - و عددها المشتق على اليسار هو 2 -

3 — بما أن العدد المشتق على يمين 1 - يختلف عن العدد المشتق على اليسار فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 -

معادلات المماسات عند النقطة ذات الفاصلة 1 -

على اليمين : $y = 2(x + 1) + 0$ أي $y = 2x + 2$

على اليسار : $y = -2(x + 1) + 0$ أي $y = -2x - 2$

4 — التغيرات : f معرفة على R

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[\\ 1 - x^2 & : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\\ -2x & : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

لاحظ أن f لا تقبل الاشتقاق عند كل من 1 - و 1

إشارة المشتقة :

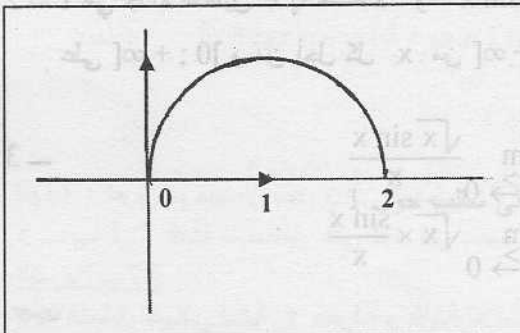
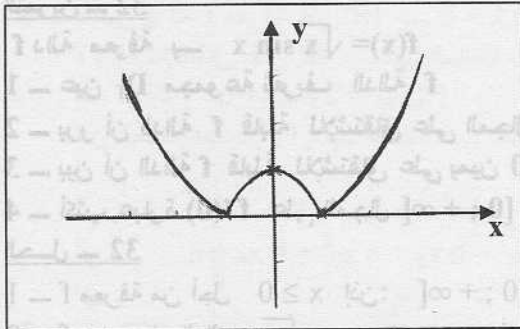
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
2 x		−	‖				‖	+	
- 2 x			‖	+	0	−	‖		
f '(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f '(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

المنحنى :

حذار ! النقط ذات الإحداثيات (0 ; 1 -) و (0 ; 1) ليست ذروات للمنحنى

لأن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 1 - و 1

التمرين ـــ 31

f دالة معرفة على المجال [2 ; 0] و تمثيلها البياني (C) عبارة عن نصف دائرة كما هو مبين في الشكل التالي :

1 ـــ برر أن f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .

2 ـــ برر أن تكون النقطة M(x ; y) تنتمي إلى (C) إذا وفقط إذا كان :

$$y \geq 0 \quad و \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

3 ـــ أكتب عبارة f(x) من أجل $x \in [0 ; 2]$

4 ـــ أوجد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال 1 .

الحل ـــ 31

1 ـــ من منحنى الدالة f نلاحظ أن المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي حامل محور التراتيب أي ميله غير منته منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0

2 ـــ لاحظ أن المنحنى (C) جزء من الدائرة ذات المركز (0 ; 1) و نصف القطر 1

إذن معادلتها : $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$

أي : $(x-1)^2 + y^2 = 1$

بما أن الجزء واقع فوق محور الفواصل فإن $y \geq 0$ أي :

معادلة المنحنى (C) هي $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$ و هو المطلوب .

3 ـــ من السؤال (2) : $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$

أي $y^2 = 1-(x-1)^2$ و $y \geq 0$

أي : $y^2 = 1-(x^2-2x+1)$ و $y \geq 0$

أي : $y^2 = 2x - x^2$ و $y \geq 0$

أي : $y = \sqrt{2x-x^2}$ و $x \in [0 ; 2]$

منه : $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ و $x \in [0 ; 2]$ و هي عبارة f(x)

4 ـــ

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{2x-x^2}-0}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{\frac{2}{x} - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\frac{2}{x} - 1} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{x} = +\infty$

إذن : f غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 و مماس المنحنى له ميل غير منته أي يوازي محور التراتيب

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

التمرين ـــ 32

f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x}\sin x$

1 ــ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 ــ برر أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على هذا المجال .

3 ــ بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين 0 ثم أحسب $f_d'(0)$ حيث $f_d'(0)$ هو العدد المشتق على يمين 0

4 ــ أكتب عبارة $f'(0)$ على المجال $[0 ; +\infty[$

الحـل ـــ 32

1 ــ f معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن: $D_f = [0 ; +\infty[$

2 ــ f هي جداء الدالتين $x \longmapsto \sqrt{x}$ و $x \longmapsto \sin x$ القابلتين للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ إذن : f قابلة للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$

3 ــ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x} = 0$$

لأن $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة : f قابلة للإشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0) = 0$

4 ــ
$$f'(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$
و هو المطلوب

التمرين ـــ 33

a و b عددان حقيقيان . f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

هل يوجد عددان a و b حيث يكون لمماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلة من الشكل $y = 4x + 3$ ؟

الحـل ـــ 33

f دالة ناطقة معرفة على IR إذن قابلة للإشتقاق على IR و خاصة عند العدد 0 وعليه فإن منحناها يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 و معادلته $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

أي : $y = f'(0)x + f(0)$

بالمطابقة مع المعادلة $y = 4x + 3$ نحصل على الشروط التالية :

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \ ...... (1) \\ f(0) = 3 \ .... (2) \end{cases}$$

لدينا : $f'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$

منه : $f'(0) = a/1 = a$

إذن : الشرط (1) يصبح $a = 4$

من جهة أخرى : $f(0) = b/1 = b$

إذن : الشرط (2) يصبح $b = 3$

خلاصة : يوجد عددان حقيقيان و حيدان هما $a = 4$ و $b = 3$ يحققان أن معادلة مماس الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = 4x + 3$

التمرين ــ 34

a عدد حقيقي . نعتبر الدالة f معرفة على IR بــ $f(x) = a x^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد قيمة لــ a حيث تقبل الدالة f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟

الحــل ــ 34

f دالة كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$ أي $f'(x) = 3(ax^2 + 2x + 1)$

تكون لــ f قيمة حدية محلية عند $x = 1$ إذا وفقط إذا إنعدمت $f'(x)$ من أجل $x = 1$ مغيرة إشارتها

أي : $f'(1) = 0$

أي : $a(1)^2 + 2(1) + 1 = 0$

أي : $a = -3$

منه : $f'(x) = 3(-3x^2 + 2x + 1)$

لندرس الأن إ شارة $f'(x)$ أي إ شارة $-3x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-6} = \dfrac{2}{-6} = -1/3 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-6} = 1 \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نتيجة : من أجل $a = -3$ فإن $f'(1) = 0$ و f' تغير إ شارتها من موجب إلى سالب حول 1

إذن : f تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 1$

التمرين ــ 35

ليكن (C) منحنى ذو المعادلة : $xy + 4x + 3y + 7 = 0$

برهن أن النقطة $A(-2\,;\,1)$ تنتمي إلى (C) و أن (C) يقبل مماس عند A يطلب تعيين معادلته .

الحــل ــ 35

لنعوض إحداثيات النقطة A في معادلة المنحنى (C) حيث : $x = -2$ و $y = 1$

إذن : $xy + 4x + 3y + 7 = -2(1) + 4(-2) + 3(1) + 7$

$= -10 + 10$

$= 0$ إذن : A تنتمي إلى (C)

لنبحث عن عبارة y بدلالة x :

$$xy + 4x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow xy + 3y = -7 - 4x$$

$$\Rightarrow y(x+3) = -7 - 4x$$

$$x \neq -3 \text{ حيث } \Rightarrow y = \frac{-7-4x}{x+3}$$

لنعتبر الدالة f معرفة على $IR - \{-3\}$ بــ $f(x) = \dfrac{-7-4x}{x+3}$

إذن : المنحنى (C) ذو المعادلة $xy + 4x + 3y + 7 = 0$ هو منحنى الدالة f .

بما أن f دالة ناطقة فهي قابلة للإشتقاق على $IR - \{-3\}$ و خاصة عند 2- و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-4(x+3) - (-7-4x)}{(x+3)^2}$$

منه : $$f'(-2) = \frac{-4(-2+3) - [-7-4(-2)]}{(-2+3)^2} = \frac{-4-1}{1} = -5$$

إذن : معادلة المماس عند النقطة A من الشكل : $y = -5(x+2) + f(-2)$

أي : $y = -5(x+2) + 1$

أي : $y = -5x - 9$

التمرين ــ 36

$c\ ;\ b\ ;\ a$ أعداد حقيقية حيث $a > 0$

(P) قطع مكافئ معادلته $y = a x^2 + b x + c$

ليكن x_0 عدد حقيقي و M_0 نقطة من (P) فاصلتها x_0 .

1 ــ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة M_0 .

2 ــ برهن أن (P) يقع فوق كل مماساته .

3 ــ عين مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x\ ;\ y)$ حيث يوجد مماس للمنحنى (P) عند النقطة M .

الحـل ــ 36

1 ــ لنعتبر الدالة f معرفة على IR بــ $f(x) = a x^2 + b x + c$ حيث $a > 0$

f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f'(x) = 2 a x + b$

منه : $f'(x_0) = 2 a x_0 + b$

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

أي : $y = (2 a x_0 + b)(x - x_0) + (a x_0^2 + b x_0 + c)$

أي : $y = (2 a x_0 + b) x - 2 a x_0^2 - b x_0 + a x_0^2 + b x_0 + c$

أي : $y = (2 a x_0 + b) x - a x_0^2 + c$ و هي معادلة المماس (T)

2 ــ ليكن (T) مماس لــ (P) عند نقطة كيفية ذات الفاصلة x_0 .

لدينا : $f(x) - [(2 a x_0 + b) x - a x_0^2 + c] = a x^2 + b x + c - [(2 a x_0 + b) x - a x_0^2 + c]$

$$= a x^2 - 2 a x_0 x + a x_0^2$$

$$= a(x^2 - 2 x_0 x + x_0^2)$$

$= a(x - x_0)^2$ موجب لأن $a > 0$

نتيجة : الفرق موجب أو معدوم إذن المنحنى (P) يقع دائما فوق المماس (T) من أجل أي قيمة لــ x_0 (أي فوق كل المماسات)

3 ــ بما أن f قابلة للإشتقاق على IR فإن مجموعة النقط M المطلوبة هي $M(x\ ;\ a x^2 + b x + c)$ أي كل نقط القطع (P)

التمرين ــ 37

إليك التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال [5 ; 0] .المستقيم المرسوم على الشكل هو مماس المنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

1 ــ بقراءة بيانية عين كل من f(1) و f '(1)

2 ــ حل بيانيا في المجال [5 ; 0] المتراجحات التالية :

أ) $f(x) \geq 0$ ب) $f'(x) \geq 0$ ج) $f(x) \leq 1$

الحـل ــ37

1 ــ من البيان نلاحظ ما يلي : $f(1) = 2$ (بالإسقاط على محور التراتيب) . ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو :

$$\tan\theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$$

إذن : $f'(1) = 3/2$

2 ــ حسب المنحنى فإن :

$f(x) \geq 0$ تكافئ $x \in [1/4\ ;\ 15/4]$ لأن المنحنى فوق محور الفواصل

$f'(x) \geq 0$ تكافئ $x \in]0\ ;\ 7/4]$ لأن المنحنى متصاعد (الدالة متزايدة)

$f(x) \leq 1$ تكافئ $x \in]0\ ;\ 1/2] \cup [3\ ;\ 5]$ لأن المنحنى يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

التمرين ــ 38

n عدد طبيعي غير معدوم ، x عدد حقيقي يختلف عن 1

1 ــ بسط المجموع $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n$

2 ــ إستنتج تبسيط للعبارة $1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + n x^{n-1}$

الحـــل ــ 38

1 ــ لاحظ أن $f_n(x)$ عبارة عن مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها x

إذن : $f_n(x) = 1 \times \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ حيث $x \neq 1$

أي : $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

2 ــ العبارة $1 + 2x + 3x^2 + ... + n\,x^{n-1}$ هي مشتقة $f_n(x)$ (لأن مشتقة مجموع هي مجموع المشتقات حسب الخواص)

منه : $1 + 2x + 3x^2 + ... + n\,x^{n-1} = f_n'(x)$

أي :

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + n\,x^{n-1} = \frac{(n+1)x^n (x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(n\,x^n + x^n)(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{n\,x^{n+1} - n\,x^n + x^{n+1} - x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{n\,x^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}$$ و هو المطلوب .

مثال : $x = 2$ ؛ $n = 3$

لدينا : $1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2(2) + 3(2)^2 = 1 + 4 + 12 = 17$

و بتطبيق العبارة المبسطة : $1 + 2x + 3x^2 = \dfrac{3(2)^4 - 4(2)^3 + 1}{(2-1)^2} = \dfrac{48 - 32 + 1}{1} = 17$

التمرين ــ 39

من أجل كل x من IR^* نضع $f(x) = 1/x$ و $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة n حيث $n \in IN^*$ للدالة f

برهن باستعمال الإستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

الحـــل ــ 39

من أجل $n = 1$: $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

و $\dfrac{(-1)^1 \times 1!}{x^{1+1}} = \dfrac{-1}{x^2}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 1$

هل $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$ ؟

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

و حسب فرضية التراجع $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

أي : $f^{n+1}(x) = \left[\dfrac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}\right]'$ (نقبل أن α' هو مشتق α)

$= (-1)^n \times n! \times \left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)'$ لأن العدد $(-1)^n \times n!$ ثابت لا تتعلق بالمجهول x

$= (-1)^n \times n! \times \left(\dfrac{-(n+1)\,x^n}{x^{2n+2}}\right)$

$= (-1)^n \times n! \times \dfrac{(-1) \times (n+1) \times x^n}{x^n \times x^{n+2}}$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \times n!\,(n+1)}{x^{n+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل $n \in N^*$: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

التمرين – 40

f دالة معرفة على IR و قابلة للإشتقاق مرتين و تحقق الشروط التالية :

❖ **$f(0) = 0$ ، $f'(0) = 1$**

❖ **f' متزايدة على $[0 ; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty ; 0]$**

أرسم جدول تغيرات الدالة f على IR

الحـل – 40

لدينا $f'(0) = 1$ و f' متزايدة على $[0 ; +\infty[$ إذن :

من أجل $x > 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$

أي : $f'(x) > 1$

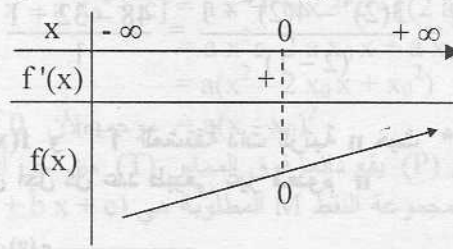
و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $[0 ; +\infty[$

و لدينا $f'(0) = 1$ و f' متناقصة على $]-\infty ; 0]$ إذن :

من أجل $x < 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$

أي : $f'(x) > 1$

و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty ; 0]$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

التمرين – 40

f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1 ; 2[$

الحـل – 40

1 – التغيرات :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} - \sqrt{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

f مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$

إذن : f قابلة للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$

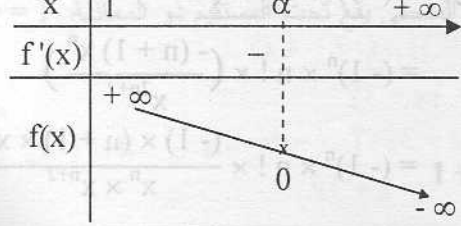
$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

إذن : من أجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) < 0$

منه : f متناقصة على المجال $]1 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	1	α	+∞
f '(x)		−	
f(x)	+∞	0	-∞

2 ــ $f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$

نتيجة : f مستمرة على $]1 ; 2]$ ، f متناقصة تماما على $]1 ; 2]$ ، f تأخذ قيم موجبة ثم سالبة على المجال $]1 ; 2]$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1 ; 2]$ يحقق $f(\alpha) = 0$

ملاحظة : يمكن البحث عن قيمة تقريبية لــ α بالتنصيف .

التمرين ــ 41

إليك الشكل الموالي يمثل منحنى (C) لدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $[-3 ; 3]$ في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ المنحنى يحقق الشروط التالية :

- ✓ **يمر بمبدأ المعلم**
- ✓ **يشمل النقطة $(-3 ; 9)$**
- ✓ **يقبل في النقطة B ذات الفاصلة 1 مماسا أفقيا .**
- ✓ **يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O**

1 ــ ماهو معامل توجيه المستقيم (OA)

نفرض أن f معرفة على $[-3 ; 3]$ بــ $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية .

2 ــ بين بإستعمال الشروط السابقة أن $a = 1/3$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = -3$ ؛ $d = 0$

3 ــ حلل $f'(x)$ ثم أستنتج إتجاه تغير الدالة f .

الحــل ــ41

1 ــ معامل توجيه المستقيم (OA) هو ميل هذا المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها مع الأفق أي : $\tan\theta = -9/3 = -3$

2 ــ لتكن $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

إذن : $f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$

لدينا ثلاث شروط : المنحنى يمر بالمبدأ إذن : $f(0) = 0$ .... (1)

المنحنى يشمل النقطة $A(-3 ; 9)$ إذن : $f(-3) = 9$ .... (2)

ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو 3 - إذن : $f'(0) = -3$ ..... (3)

الشرط (1) $f(0) = 0$ أي $a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0$ منه $d = 0$

الشرط (2) $f(-3) = 9$ أي $a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + 0 = 9$ منه $-27 a + 9 b - 3 c = 9$

الشرط (3) $f'(0) = -3$ أي $3 a(0)^2 + 2 b(0) + c = -3$ منه $c = -3$

نتيجة : $c = -3$; $d = 0$

إذن : الشرط (2) يصبح $-27 a + 9 b + 9 = 9$ أي : $9 b = 27 a$ أي : $b = 3 a$

من جهة أخرى المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 أفقي أي $f'(1) = 0$

أي : $3 a(1)^2 + 2 b(1) + c = 0$

أي : $3 a + 6 a - 3 = 0$ (لأن $b = 3a$ و $c = -3$)

أي : $9 a = 3$

أي : $a = 1/3$ منه $b = 3(1/3) = 1$

خلاصة : $a = 1/3$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = -3$ ؛ $d = 0$ و هو المطلوب

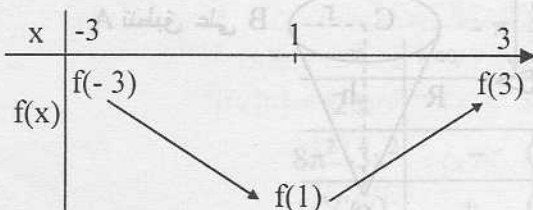
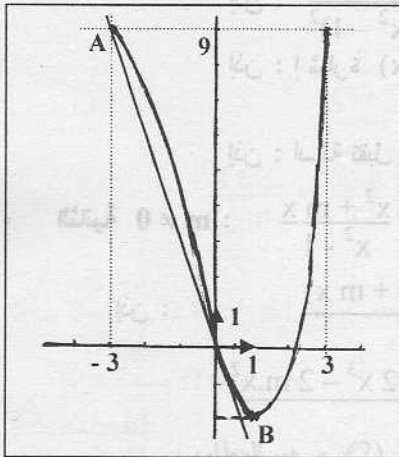
3 ــ $f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$ أي $f'(x) = x^2 + 2 x - 3$

$= (x - 1)(x + 3)$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-3 ; 3]$:

x	-3		1		3
f(x)	f(- 3)	↘	f(1)	↗	f(3)

التمرين ــ 42

f_m دالة معرفة على $IR - \{1 ; -1\}$ بـــ $f_m(x) = \dfrac{x^2 + m\,x}{x^2 - 1}$ مع m وسيط حقيقي .

1 ــ من أجل أي قيم لــ m تكون الدالة f_m لا تقبل قيم حدية محلية ؟

2 ــ من أجل أي قيم لــ m تكون الدالة f_m تقبل قيمتين حديتين محليتين أحدهما صغرى و الأخرى عظمى ؟

الحـل ــ42

1 ــ نميز حالتين :

الأولى $m = 0$: $f_0(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

إذن : $f_0'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-2x$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	‖	+	0	−	‖	−

إذن : الدالة تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 0$

الثانية $m \neq 0$: $f_m(x) = \dfrac{x^2 + m\,x}{x^2 - 1}$ مع $m \neq 0$

إذن : $f_m'(x) = \dfrac{(2x + m)(x^2 - 1) - 2x(x^2 + m\,x)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x^3 - 2x + m\,x^2 - m - 2x^3 - 2m\,x^2}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{-m\,x^2 - 2x - m}{(x^2-1)^2}$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة كثير الحدود $-m\,x^2 - 2x - m$ كما لي :

$\Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)$

نتيجة : تكون الدالة f لا تقبل قيمة حدية محلية إذا وفقط إذا كانت مشتقتها لا تغير إشارتها أي $f'(x) \geq 0$ أو $f'(x) \leq 0$ على طول مجال تعريفها و في هذه الحالة (إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية) يكون هذا محقق إذا وفقط إذا كان $\Delta \leq 0$ كما يلي :

m		-1		0		1	
$\Delta = 4(1 - m^2)$	−	0	+	‖	+	0	−

إذن $m \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

خلاصة : f_m لا تقبل قيم حدية محلية من أجل $m \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

2 ــ **نميز حالتين :**

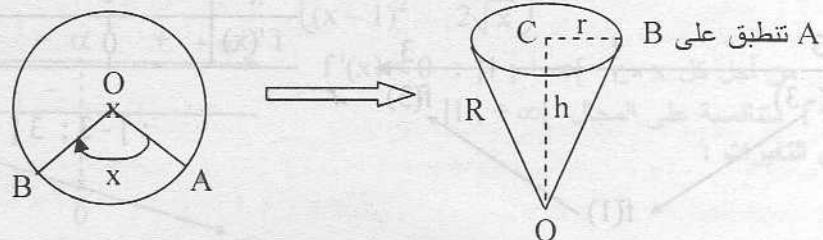
✓ $m = 0$ غير محقق حسب السؤال (1) .

✓ $m \neq 0$ حتى تكون الدالة تقبل قيمتين حديتين محليتين يجب أن يتحقق أن دالتها المشتقة تنعدم مرتين مغيرة إشارتها بالتناوب أي موجب سالب موجب أو سالب موجب سالب . وفي هذه الحالة لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة كثير حدود $-m\,x^2 - 2x - m$ حيث $m \neq 0$ إذن يكفي أن يكون $\Delta > 0$

أي $4(1 - m^2) > 0$

منه : $m \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$

التمرين ــ 43

نعتبر قرص مركزه O و نصف قطره R نقطع منه قطاعا زاويا $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ قياسه x راديان كماهو موضح على الشكل ثم نلصق القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ فنحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته r و إرتفاعه h

1 ـ عبر عن r و h بدلالة x و R.

2 ـ برهن أن حجم المخروط الدوراني الناتج معرف بالعلاقة $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة V على المجال $]0 ; 2\pi[$

4 ـ من أجل أي قيمة للعدد x يكون حجم المخروط الناتج أكبر مايمكن ؟ أحسب هذا الحجم بدلالة R .

الحـل ـ43

1 ـ لدينا طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو x R

إذن : محيط قاعدة المخروط الدوراني الناتج هو $p = x R$

من جهة أخرى : $p = 2\pi r$ إذن : $2\pi r = x R$

منه : $r = \frac{x R}{2\pi}$ ....(1) و هو المطلوب .

بتطبيق نظرية فيتاغورث على المثلث OAC القائم في C حيث C هو مركز قاعدة المخروط الناتج نحصل على : $r^2 + h^2 = R^2$

أي : $h = \sqrt{R^2 - r^2}$

أي : $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x R}{2\pi}\right)^2}$

أي : $h = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 - x^2 R^2}{4\pi^2}}$

أي : $h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ ....(2) و هو المطلوب

2 ـ حجم المخروط الدوراني الناتج هو : $V(x) = \frac{1}{3} S . h$ حيث : S هي مساحة قاعدة المحروط و h هو إرتفاعه .

لدينا : $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x R}{2\pi}\right)^2 = \frac{R^2 x^2}{4\pi}$

منه $V(x) = \frac{1}{3} \times \frac{R^2 x^2}{4\pi} \times \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

منه : $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ و هو المطلوب

3 ـ تغيرات الدالة V على $]0 ; 2\pi[$: $V(0) = 0$ ؛ $v(2\pi) = 0$

الدالة V قابلة للإشتقاق على $]0 ; 2\pi[$ و دالتها المشتقة:

$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{4x(4\pi^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{16x\pi^2 - 6x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

إذن : إشارة $v'(x)$ هي إشارة $16x\pi^2 - 6x^3$ لأن $\frac{R^3}{24\pi^2} . \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$ موجب .

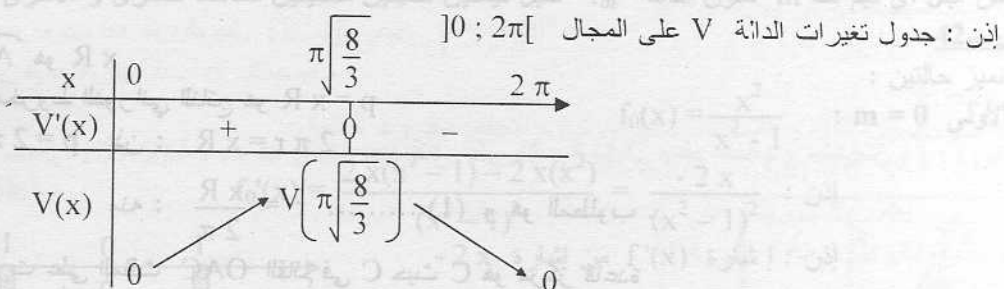
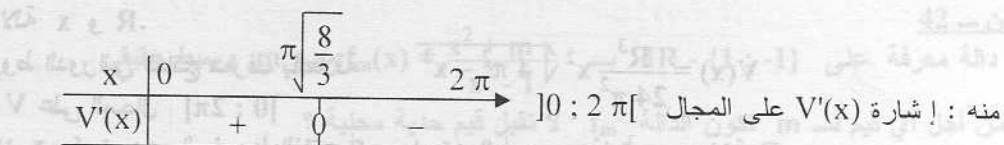
$16x\pi^2 - 6x^3 = 2x(8\pi^2 - 3x^2)$

x	$-\infty$	$-\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$		0		$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	2π	$+\infty$
2 x		−		0		+		
$8\pi^2 - 3x^2$	−	0	+			0	−	
V'(x)	+	0	−	0	+	0	−	

x	0		$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$		2π
V'(x)		+	0	−	

منه : إشارة $V'(x)$ على المجال $]0 ; 2\pi[$

إذن : جدول تغيرات الدالة V على المجال $]0 ; 2\pi[$

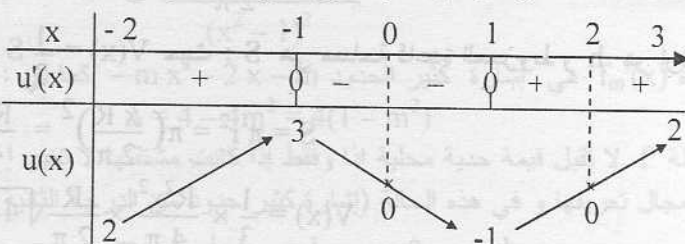
x	0		$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$		2π
V'(x)		+	0	−	
V(x)	0	↗	$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$	↘	0

$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \left(\frac{8}{3}\pi^2\right)\sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{R^3}{9}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

4 ــ لاحظ أن الدالة V تقبل قيمة حدية محلية عظمى على المجال $]0 ; 2\pi[$ من أجل $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$

إذن: الحجم الأعظمي هو $V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

التمرين ــ 44

إليك جدول تغيرات الدالة u معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $D_u = [-2 ; 3]$

x	-2		-1		0		1		2		3
u'(x)		+	0	−		−	0	+		+	
u(x)	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

1 ــ عين إشارة $u(x)$ على $[-2 ; 3]$

نعتبر الدوال $f ; g ; h ; k$ معرفة على $[-2 ; 3]$ كمايلي : $f = u^2$; $g = u^3$; $h = 1/u$; $k = \sqrt{u}$

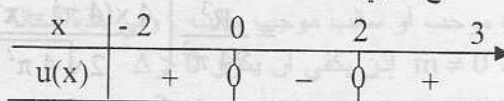
2 ــ عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال $f ; g ; h ; k$

3 ــ عبر عن كل من $f'(x)$; $g'(x)$; $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$

4 ــ إستنتج جدول تغيرات كل دالة من الدوال $f ; g ; h ; k$ على مجموعة تعريفها

الحـل ــ44

1 ــ من جدول تغيرات الدالة u نستنتج مايلي :

x	-2		0		2		3
u(x)		+	0	−	0	+	

2 ــ $f(x) = [u(x)]^2$ إذن f معرفة على $[-2 ; 3]$

$g(x) = [u(x)]^3$ إذن g معرفة على $[-2 ; 3]$

$h(x) = \frac{1}{u(x)}$ إذن h معرفة من أجل $u(x) \neq 0$ أي على المجال $[-2 ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 3]$

$k(x) = \sqrt{u(x)}$ إذن k معرفة من أجل $u(x) \geq 0$ أي على المجال $[-2 ; 0] \cup [2 ; 3]$

3 ــ $f'(x) = 2\,u'(x) \times u(x)$

$g'(x) = 3\,u'(x) \times [u(x)]^2$

$h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$ على المجال $[-2 ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 3]$

$k'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ على المجال $[-2 ; 0[\cup]2 ; 3]$

4 ـــ لندرس في كل مرة إشارة الدالة المشتقة ثم نرسم جدول التغيرات :

الدالة f : $f'(x) = 2\, u'(x)\, u(x)$

x	-2		-1		0		1		2		3
u'(x)		+	0	−		−	0	+		+	
u(x)		+		+	0	−		−	0	+	
الجداء		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		-1		0		1		2		3
f'(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
f(x)	4	↗	9	↘	0	↗	1	↘	0	↗	4

$f(-2) = [u(-2)]^2 = (2)^2 = 4$
$f(-1) = [u(-1)]^2 = (3)^2 = 9$
$f(0) = [u(0)]^2 = (0)^2 = 0$
$f(1) = [u(1)]^2 = (-1)^2 = 1$

$f(2) = [u(2)]^2 = (0)^2 = 0$
$f(3) = [u(3)]^2 = (2)^2 = 4$

الدالة g : $g'(x) = 3\, u'(x) \times [u(x)]^2$

x	-2		-1		0		1		2		3
u'(x)		+	0	−		−	0	+		+	
$[u(x)]^2$		+		+	0	+		+	0	+	
الجداء		+	0	−	0	−	0	+	0	+	

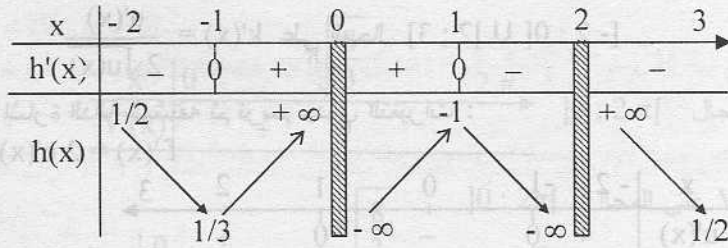
منه جدول تغيرات الدالة g :

x	-2		-1		0		1		2		3
g'(x)		+	0	−	0	−	0	+	0	+	
g(x)	8	↗	27	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	8

$g(-2) = [u(-2)]^3 = (2)^3 = 8$
$g(-1) = [u(-1)]^3 = (3)^3 = 27$
$g(1) = [u(1)]^3 = (-1)^3 = -1$
$g(3) = [u(3)]^3 = (2)^3 = 8$

الدالة h : $h'(x) = \dfrac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$ من إشارة $-u'(x)$ على المجال $[-2 ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 3]$

x	-2		-1		0		1		2		3
u'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	‖	+	
-u'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	‖	−	

منه جدول تغيرات الدالة h :

$$h(-2) = \frac{1}{u(-2)} = 1/2$$

$$h(-1) = \frac{1}{u(-1)} = 1/3$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ (لأن $u(x)$ موجبة على يسار 0)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$

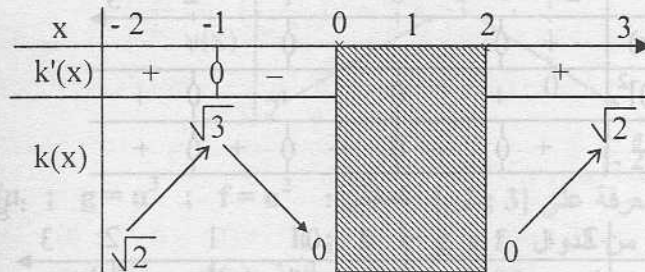
$$h(1) = \frac{1}{u(1)} = -1/1 = -1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$ (لأن $u(x)$ سالبة على يسار 2)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$h(1) = \frac{1}{u(3)} = 1/2$$

الدالة k : $k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ من إشارة $u'(x)$ على المجال $[-2 ; 0[\cup]2 ; 3]$

منه جدول تغيرات :

$$k(-2) = \sqrt{u(-2)} = \sqrt{2}$$

$$k(-1) = \sqrt{u(-1)} = \sqrt{3}$$

$$k(0) = \sqrt{u(0)} = 0$$

$$k(2) = \sqrt{u(2)} = 0$$

$$k(3) = \sqrt{u(3)} = \sqrt{2}$$

التمرين ــ 45

1 ــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $IR - \{1\}$ بــ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

2 ــ إستنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية :

$$g : x \longmapsto \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 1} \qquad k : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$$

$$h : x \longmapsto \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \qquad \ell : x \longmapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$$

الحـل ــ 45

ــ 1

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

لاحظ أن إذا إعتبرنا الدالة $u : x \longmapsto x$ فإن $f(x) = \dfrac{[u(x)]^2 + 1}{u(x) - 1}$ مع $u(x) - 1 \neq 0$

منه : $f'(x) = \dfrac{2\,u'(x)\,u(x)\,(u(x) - 1) - u'(x)\,([u(x)]^2 + 1)}{(u(x) - 1)^2}$

$$= \frac{u'(x)\,[u(x)]^2 - 2\,u'(x)\,u(x) - u'(x)}{(u(x) - 1)^2}$$

2 ـ لتكن $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$ إذن : $g(x) = f(\sqrt{x})$ أي $u(x) = \sqrt{x}$ و $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

منه : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x})^2 - 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ ،

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

✓ $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$ إذن : $h(x) = f(x^2)$ أي $u(x) = x^2$ و $u'(x) = 2x$

منه : $h'(x) = \dfrac{2x(x^2)^2 - 2 \times 2x \times x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

✓ $k(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}}$ إذن : $k(x) = \sqrt{f(x)}$ مع $x > 0$

منه : $k'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

أي : $k'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}}}$

أي : $k'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 + 1}}$

✓ $\ell(x) = \dfrac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$ إذن : $\ell(x) = f(\sin x)$ أي $u(x) = \sin x$ و $u'(x) = \cos x$ مع $\sin x - 1 \neq 0$

منه : $\ell'(x) = \dfrac{\cos x \,.\, \sin^2 x - 2\cos x \sin x - \cos x}{(\sin x - 1)^2}$

$$= \frac{\cos x(\sin^2 x - 2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}$$

التمرين ــ 46

من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماما من 1 نعرف الدالة f_n على IR بــ $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

1 ــ أحسب نهايتي f_n عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f_n (ميز بين n زوجي و n فردي) .

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد و متجانس .

3 ــ تحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_n) .

4 ــ برر أن (C_n) يمر بأربع نقط ثابتة يطلب تعيينها .

5 ــ أرسم (C_1) (أي $n = 1$)

الحــل ــ 46

1 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2)^n = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2)^n = +\infty$

2 ــ **التغيرات :** f_n قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f_n'(x) = n(2x - 2)(x^2 - 2x)^{n-1}$$
$$= 2n\,x^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1}$$

إذن: إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1}$ لأن $2n$ موجب تماما لذلك نميز حالتين :

الحالة الأولى : n زوجي إذن $(n-1)$ فردي

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^{n-1}	−	0	+		+		+
$x - 1$	−		−	0	+		+
$(x-2)^{n-1}$	−		−		−	0	+
الجداء	−	0	+	0	−	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f_n'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	1	↘	0	↗ $+\infty$

الحالة الثانية : n فردي إذن $(n-1)$ زوجي

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^{n-1}	+	0	+		+		+
$x - 1$	−		−	0	+		+
$(x-2)^{n-1}$	+		+		+	0	+
الجداء	−	0	−	0	+	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘	-1	↗	0	↗ $+\infty$

3 ـــ من أجل كل x من IR فإن $(2 - x) \in IR$ و $f_n(2 - x) = [(2 - x)^2 - 2(2 - x)]^n$

$= [4 - 4x + x^2 - 4 + 2x]^n$

$= (x^2 - 2x)^n$

$= f_n(x)$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_n)

4 ـــ من أجل $x^2 - 2x = 0$ فإن $f_n(x) = 0$ مهما يكون n من IN*

من أجل $x^2 - 2x = 1$ فإن $f_n(x) = 1$ مهما يكون n من IN*

لنحل إذن المعادلتين : $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$

$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

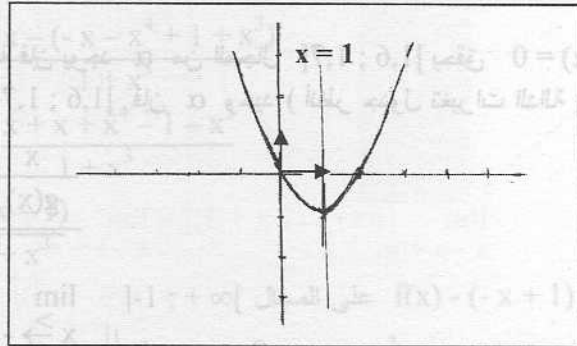
$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي غير المعدوم n فإن النقط $A(0 ; 0)$ ، $B(2 ; 0)$ ، $C(1 - \sqrt{2} ; 1)$ و $D(1 + \sqrt{2} ; 1)$ ثابتة من المنحنى (C_n) .

5 ـــ إنشاء (C_1) :

$f_1(x) = x^2 - 2x$

$f_1'(x) = 2x - 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

المنحنى :

التمرين ـــ 47

الجزء I :

g دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة g .

2 ـــ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1,6 و 1,7

3 ـــ إستنتج إشارة $g(x)$ على $]-1 ; +\infty[$

الجزء II :

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x^3}$. نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ـــ بين أن $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين .

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة f على $]-1 ; +\infty[$.

3 ـــ عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 ـــ تحقق أن من أجل كل x من $]-1 ; 1[$: $f(x) - (-x + 1) = \dfrac{x^3(x - 1)}{x^3 + 1}$

5 ـ أستنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (Δ)
6 ـ أرسم كل من (C) و (Δ)

الحـل ـ 47

الجزء I :

1 ـ **تغيرات الدالة g :**

g معرفة و قابلة للإشتقاق على IR و خاصة على]-1 ; +∞[و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x	-∞		0		1		+∞
g'(x)		+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة g على]-1 ; +∞[

x	-1		0		1		+∞
g'(x)		+	0	−	0	+	
g(x)	-6	↗	-1	↘	-2	↗	+∞

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = g(-1) = -2 - 3 - 1 = -6$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

2 ـ

$$g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$$

$$g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$$

لدينا الشروط التالية : g مستمرة على [1,6 ; 1,7] ، $g(1,6) \times g(1,7) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد α من المجال]1,6 ; 1,7[يحقق $g(\alpha) = 0$

و بما أن g متزايدة تماما على]1,6 ; 1,7[فإن α وحيد (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

3 ـ **إشارة g(x) :**

x	-1	1,6	α	1,7	+∞
g(x)	−		0	+	

الجزء II :

1 ـ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1-(-1)}{1+x^3} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{y} = +\infty$$

لأن لما $x \overset{>}{\to} -1$ فإن $1 + x^3 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

التفسير الهندسي :

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي على يمين 1 - معادلته $x = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند ∞+ معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

2 ـ **التغيرات :**

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على]-1 ; +∞[و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$$

$= \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$ حيث g هي الدالة المدروسة في الجزء I .

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $(1+x^3)^2$ موجب كما يلي :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f على $]-1 ; +\infty[$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

3 ـ معادلة (Δ) : مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = -1/1 = -1 \\ f(0) = 1/1 = 1 \end{array}\right\} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

منه معادلة (Δ) : $y = -x + 1$

4 ـ من أجل كل x من $]-1 ; +\infty[$ فإن

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{1+x^3} - (-x+1)$$

$$= \frac{1 - x - (-x - x^4 + 1 + x^3)}{1+x^3}$$

$$= \frac{1 - x + x + x^4 - 1 - x^3}{1+x^3}$$

$= \dfrac{x^3(x-1)}{1+x^3}$ و هو المطلوب

5 ـ إشارة $f(x) - (-x+1)$ على المجال $]-1 ; +\infty[$

x	-1		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0		$+$		
$x-1$			$-$		0	$+$	
$1+x^3$				$+$			
$\dfrac{x^3(x-1)}{1+x^3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(Δ)

1

x = - 1

خلاصة : لما $x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]0 ; 1[$: (C) يقع تحت (Δ)

لما $x \in \{0 ; 1\}$: (C) يقطع (Δ)

<u>التمرين ـ 48</u>

f دالة معرفة على المجموعة D_f بـ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ مع $D_f =]-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ـ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2 ـ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 ــ هل f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟ عند 4 - ؟
4 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in D_f - \{0\,;\,-4\}$
5 ــ أنشئ جدول تغيرات الدالة f ثم المنحنى (C)

الحــل ــ 48

1 ــ
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x+1+\sqrt{x^2+4x}) \times \frac{x+1-\sqrt{x^2+4x}}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2-4x}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{x+1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$ لأن $\sqrt{x^2+4x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x+1+x\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$ لأن $|x| = -x$ لما $x\to-\infty$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)}$$
$$= \frac{-2}{1+1}$$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$
$$= -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x}$$
$$= +\infty$$

2 ــ
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x+3)] = \lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x}-2x-3$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2+4x}-(x+2)] \times \frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$
$= 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x+3$
مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 ــ لا يمكن لـــ f أن تكون قابلة للإشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0
لا يمكن لـــ f أن تكون قابلة للإشتقاق عند 4 - لأنها ليست معرفة على يمين 4 -

4 ــ من أجل $x \in D_f - \{0\,;\,-4\}$ فإن
$$f'(x) = 1 + \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}$$
$$= 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

5 ــ إشارة $f'(x)$:

أ . على المجال $]0 ; +\infty[$ لدينا $\left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ \sqrt{x^2+4x}>0 \end{array}\right\}$

إذن : $1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}>0$ أي $f'(x)>0$

ب . على المجال $]-\infty ; -4[$ لدينا : $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2$$ لأن الطرفين موجبين لما $x\in]-\infty ; -4[$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x \geq x^2+4x+4$$

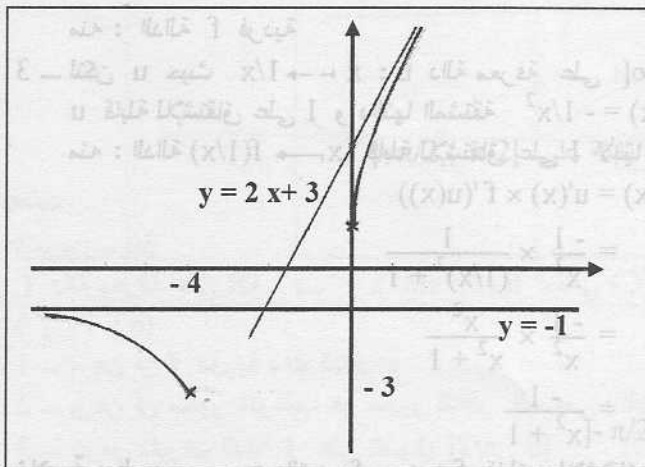
$$\Leftrightarrow 0 \geq 4$$ مستحيل.

إذن على المجال $]-\infty ; -4[$ لا يمكن أن يكون $f'(x)\geq 0$ أي $f'(x)<0$

خلاصة : إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$ -4	-4 0	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	(مخطط)	$+$

منه جدول تغيرات الدالة f :

الإنشاء :

التمرين ــ 49

f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على IR حيث $f(0)=0$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

نقبل أن الدالة f موجودة و لا نريد ايجاد عبارتها $f(x)$ و نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

g دالة معرفة على IR بـــ $g(x)=f(x)+f(-x)$

1 ــ برر أن g قابلة للإشتقاق على IR ثم عين $g'(x)$

2 ــ أحسب $g(0)$. ثم إستنتج أن الدالة f فردية

لتكن h دالة معرفة على المجال I حيث $I=]0 ; +\infty[$ بـــ $h(x)=f(x)+f(1/x)$

3 ــ برر أن h قابلة للإشتقاق على I ثم أحسب $h'(x)$

4 ــ برهن ان من أجل كل x من I فإن : $h(x)=2f(1)$

5 ــ إستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)$. فسر النتيجة هندسيا .

k دالة معرفة على $]-\pi/2 ; \pi/2[$ بـــ $k(x)=f(\tan x)-x$

6 ــ أحسب $k'(x)$ ماذا ينتج عن الدالة k ؟

7 ــ أحسب $f(1)$

8 ــ أنجز جدول تغيرات الدالة f على IR

9 ــ أرسم المنحنى (C) و اكتب معادلات مماساته عند النقط التي فواصلها 0 ; -1 ; 1

الحـل ــ 49

1 ــ لتكن u دالة حيث $u : x \mapsto -x$ منه u قابلة للإشتقاق على IR و $u'(x) = -1$

إذن : $f(-x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

منه : الدالة $x \mapsto f(-x)$ هي مركب الدالتين u و f إذن هي دالة قابلة للإشتقاق على IR

و دالتها المشتقة هي : $x \mapsto u'(x) \times f'(u(x))$

أي : $x \mapsto -1\, f'(-x)$

أي : $x \mapsto \dfrac{-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{-1}{x^2+1}$

خلاصة : g هي مجموع دالتين f و $f \circ u$ قابلتين للإشتقاق على IR إذن : g قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = f'(x) + (-1)\, f'(x)$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن الدالة g ثابتة على IR

2 ــ $g(0) = f(0) + f(-0) = 2\, f(0) = 0$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $g(x) = g(0) = 0$ لأن g ثابتة .

أي : من أجل كل x من IR فإن $f(x) + f(-x) = 0$

أي : من أجل كل x من IR فإن $f(-x) = -f(x)$

منه : الدالة f فردية

3 ــ لتكن u حيث $u : x \mapsto 1/x$ دالة معرفة على $I =]0 ; +\infty[$

u قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة $u'(x) = -1/x^2$

منه : الدالة $x \mapsto f(1/x)$ قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب الدالتين f و u و دالتها المشتقة كمايلي :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{(1/x)^2+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2+1}$$

خلاصة : h هي مجموع دالتين f و $f \circ u$ قابلتين للإشتقاق على I

إذن : h قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = f'(x) + \left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن الدالة h ثابتة

4 ــ لدينا $h(1) = f(1) + f(1/1) = f(1) + f(1) = 2\, f(1)$

لكن h دالة ثابتة إذن : من أجل كل x من I فإن $h(x) = h(1)$

أي : من أجل كل x من I فإن $h(x) = 2\, f(1)$

5 ــ لدينا من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x) + f(1/x)$

أي : $2\, f(1) = f(x) + f(1/x)$

أي : $f(x) = 2\, f(1) - f(1/x)$

منه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [2\, f(1) - f(1/x)]$

$$= 2\,f(1) - \lim_{x \to +\infty} f(1/x)$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$ $\quad = 2\,f(1) - \lim_{y \to 0} f(y)$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1) - 0$ لأن $\lim_{y \to +\infty} f(y) = f(0) = 0$ (f قابلة للإشتقاق عند 0 إذن فهي مستمرة عند 0)

أي : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1)$

تفسير هندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2\,f(1)$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

6 – $k(x) = f(\tan x) - x$

نعرف الدالة $u : x \longmapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

إذن : $u'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

منه : $k'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \times f'(\tan x) - 1$ لأن $k'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) - 1$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\tan^2 x + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 1$$

$$= 1 - 1$$

$= 0$ إذن الدالة k ثابتة على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

بما أن : $k(0) = f[\tan(0)] - 0$

$$= f(0) - 0$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

فإن الدالة k معدومة على $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ أي :

من أجل كل x من $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ فإن $k(x) = 0$

أي : $f(\tan x) - x = 0$ و هذا من أجل كل x من $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$

من أجل $x = \pi/4$ نحصل على : $f\left(\tan \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\pi}{4} = 0$

أي : $f\left(\tan \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

أي : $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ لأن $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$

نتيجة : $f(1) = \pi/4$

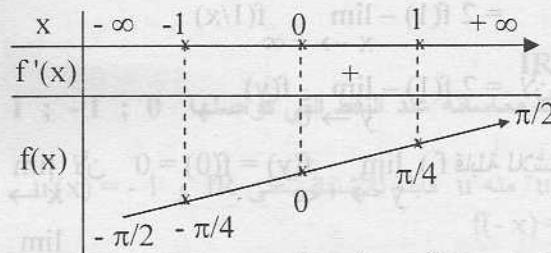
8 – **جدول تغيرات الدالة f على IR**

حسب الأسئلة السابقة تحصلنا على:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ فردية} \\ f(1) = \pi/4 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,f(1) = \pi/2 \end{array}\right\}$$

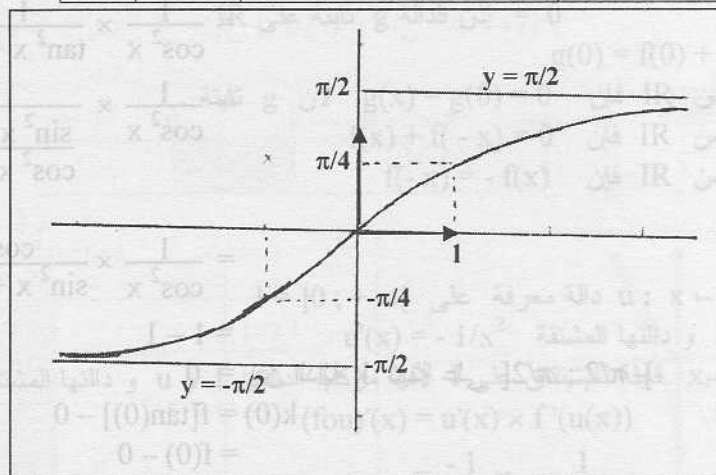
بما أن f فردية فإن يمكن إستنتاج مايلي :

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -\pi/4 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/2 \end{array}\right\}$$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

9 ـــ معادلات المماسات عند النقط ذات الفواصل $-1 \; ; \; 0 \; ; \; 1$:

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	معادلة المماس
0	0	$\frac{1}{0+1} = 1$	$y = x$
- 1	- π/4	$\frac{1}{(-\pi/4)^2+1} = \frac{16}{16+\pi^2}$	$y = \frac{16}{16+\pi^2}(x+1) - \frac{\pi}{4}$
1	π/4	$\frac{1}{(+\pi/4)^2+1} = \frac{16}{16+\pi^2}$	$y = \frac{16}{16+\pi^2}(x-1) + \frac{\pi}{4}$

المنحنى :

التمرين ـــ 50

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \sin^2 x$ نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o \; ; \vec{i} \; ; \vec{j})$

1 ـــ برهن أن f دورية ذات الدور π

2 ـــ برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C) .

3 ـــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 \; ; \pi/2]$

4 ـــ أرسم المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2} \; ; \frac{3\pi}{2}\right]$

الحـل ـــ 50

1 ـــ من أجل كل x من IR فإن $(x + \pi) \in IR$ و لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \sin^2(x+\pi) \\ &= [\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi]^2 \\ &= (-\sin x + 0)^2 \\ &= \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن : f دورية و دورها π

نتيجة : يكفي دراسة الدالة f على مجال طوله π

2 ـــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) \\ &= (-\sin x)^2 \\ &= \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن : f دالة زوجية منه المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر

3 ــ **تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$**

f قابلة للإشتقاق على IR و خاصة على $[0 ; \pi/2]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x$$

إشارة $f'(x)$:

x	0		$\pi/2$
cos x		+	0
sin x	0	+	
f '(x)	0	+	0

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$

x	0		$\pi/2$
f '(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

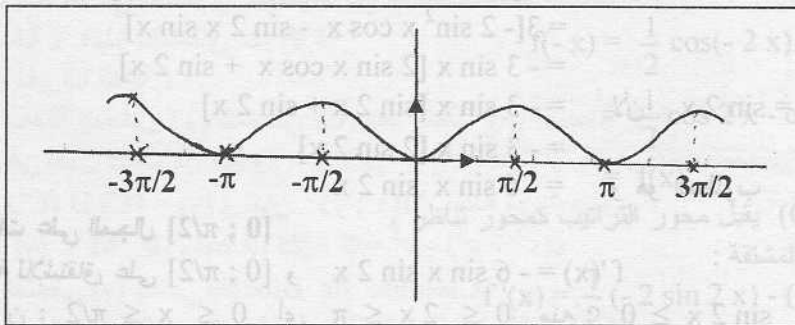
4 ــ لرسم المنحنى على $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ نتبع الخطوات التالية :

✓ نرسم جزء المنحنى على المجال $[0 ; \pi/2]$ حسب جدول التغيرات .

✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم الجزء من المنحنى على المجال $[-\pi/2 ; 0]$

✓ بإجراء إنسحاب للمنحنى على المجال $[-\pi/2 ; \pi/2]$ نرسم الأجزاء من المنحنى على المجالين $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}+\pi\right]$ أي $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[-\frac{\pi}{2}-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ أي $\left[-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right]$ هكذا نتحصل على المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ كما يلي :

-3π/2 -π -π/2 π/2 π 3π/2

<u>**التمرين ــ 51**</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$

1 ــ قارن بين f(x) و كل من $f(\pi - x)$; $f(-x)$; $f(x + 2\pi)$

2 ــ برهن أنه يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$

5 ــ أرسم منحنى الدالة f على $[-\pi ; \pi]$

<u>**الحــل ــ 51**</u>

1 ــ من أجل كل x من IR لدينا $(x + 2\pi) \in IR$ و $(-x) \in IR$ و $(\pi - x) \in IR$ حيث :

$$f(x + 2\pi) = \sin 3(x + 2\pi) - 3\sin(x + 2\pi)$$
$$= \sin(3x + 6\pi) - 3\sin(x + 2\pi)$$
$$= \sin 3x - 3\sin x$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب (1)

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3\sin(-x)$$
$$= -\sin 3x + 3\sin x$$
$$= -(\sin 3x - 3\sin x)$$
$$= -f(x)$$ و هو المطلوب (2)

$$f(\pi - x) = \sin 3(\pi - x) - 3\sin(\pi - x)$$
$$= \sin(3\pi - 3x) - 3\sin x$$

$= \sin 3x - 3\sin x$

$= f(x)$ و هو المطلوب (3)

2 ــ **خلاصة** : حسب السؤال (1) لدينا

✓ $f(x + 2\pi) = f(x)$: إذن 2π هو دور الدالة f

منه : يكفي دراستها على مجال طوله 2π و ليكن $[-\pi ; \pi]$

✓ $f(-x) = -f(x)$: إذن f فردية أي المبدأ $0\ (0 ; 0)$ هو مركز تناظر للمنحنى .

منه : يكفي دراسة الدالة f على المجال $[0 ; \pi]$

✓ ندرس الدالة f على $[0 ; \pi/2]$ ثم باستعمال العلاقة $f(\pi - x) = f(x)$ نحصل على المنحنى على المجال $[\pi/2 ; \pi]$

لأن : $0 \le x \le \pi/2$

أي : $-\pi/2 \le -x \le 0$

أي : $\pi - \pi/2 \le \pi - x \le \pi$

أي : $\pi/2 \le \pi - x \le \pi$

✓ بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ نحصل على المنحنى على الجزء $[-\pi ; -\pi/2]$

نتيجة يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$

3 ــ f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x$

$= 3[\cos 3x - \cos x]$

$= 3[\cos(2x + x) - \cos x]$

$= 3[\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x]$

$= 3[\cos x(\cos 2x - 1) - \sin 2x \sin x]$

$= 3[\cos x(-2\sin^2 x) - \sin 2x \sin x]$ لأن $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

$= 3[-2\sin^2 x \cos x - \sin 2x \sin x]$

$= -3\sin x[2\sin x \cos x + \sin 2x]$

$= -3\sin x[\sin 2x + \sin 2x]$ لأن $2\sin x \cos x = \sin 2x$

$= -3\sin x[2\sin 2x]$

$= -6\sin x \sin 2x$ و هو المطلوب

4 ــ **التغيرات على المجال $[0 ; \pi/2]$**

f قابلة للإشتقاق على $[0 ; \pi/2]$ و $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$

لاحظ أن : $0 \le x \le \pi/2$ أي $0 \le 2x \le \pi$ منه : $\sin 2x \ge 0$

إذن : من أجل كل x من $[0 ; \pi/2]$ فإن $f'(x) \le 0$ لأن $\begin{cases} -6 < 0 \\ \sin x \ge 0 \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases}$

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi/2]$

x	0		$\pi/2$
f '(x)	0	−	0
f(x)	0	↘	-4

$f(0) = \sin 0 - 3\sin 0 = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4$

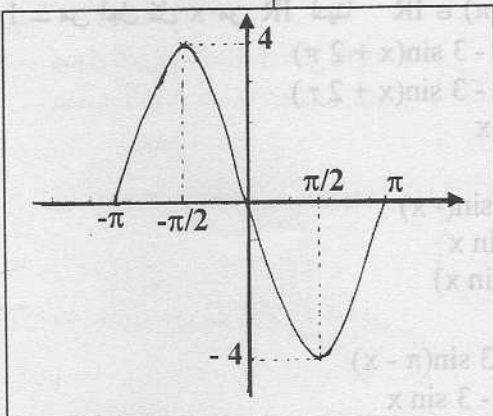
5 ــ **رسم المنحنى على $[-2\pi ; 2\pi]$**

باستعمال الخواص المطلوبة في السؤال (1) نحصل على جدول التغيرات التالي :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
f '(x)	0	+	0	−	0	−	0	+	0
f(x)	0	↗	4	↘	0	↘	-4	↗	0

منه المنحنى التالي :

4
-4
$-\pi$ $-\pi/2$ $\pi/2$ π

التمرين ــ 52

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ برهن أن الدالة f دورية و دورها 2π

2 ــ برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C) .

3 ــ أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \sin x [1 - 2\cos x]$

4 ــ أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; \pi]$

5 ــ أرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[-\pi ; \pi]$

6 ــ كيف يمكن إستنتاج المنحنى (C) على IR ؟

الحـل ــ 52

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(x + 2\pi) \in IR$ و

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\cos 2(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi)$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2x + 4\pi) - \cos x$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$
$$= f(x)$$

إذن : f دورية و دورها 2π

2 ــ من أجل كل x من IR لدينا $(-x) \in IR$ و :

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x)$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$$
$$= f(x)$$

إذن : f دالة زوجية أي منحناها (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .

3 ــ f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2\sin 2x) - (-\sin x)$$
$$= -\sin 2x + \sin x$$
$$= -(2\sin x\cos x) + \sin x \quad \text{لأن } \sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$= \sin x(1 - 2\cos x) \quad \text{و هو المطلوب}$$

4 ــ $f'(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$

على المجال $[0 ; \pi]$ لدينا : $1 - 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x \leq 1/2$

$\Leftrightarrow x \in [\pi/3 ; \pi]$

منه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0		π/3		π
sin x	0		+		0
1 – 2 cos x		−	0	+	
f '(x)	0	−	0	+	0

5 ــ جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

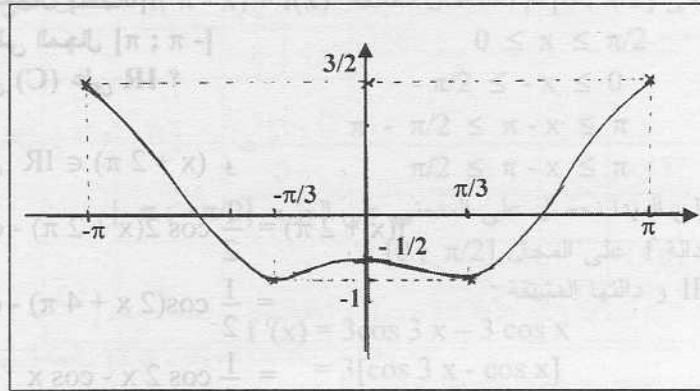
x	0		π/3		π
f '(x)	0	−	0	+	0
f(x)	$\frac{-1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$

$$f(0) = \frac{1}{2}\cos 0 - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\cos 2\pi - \cos\pi = \frac{1}{2}(1) - (-1) = \frac{3}{2}$$

إنشاء المنحنى على $[-\pi ; \pi]$ (بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم الجزء على $[-\pi ; 0]$ كما في الشكل :

6 ــ الانشاء على IR : باجراء انسحاب للمنحنى (C) على مجالات طولها 2π نحصل على المنحنى على IR

التمرين ــ 53

f دالة معرفة على $[0 ; 1[$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 ــ هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f

3 ــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2

4 ــ أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) و (C') حيث (C') هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

5 ــ نضع $(\gamma) = (C) \cup (C')$ و لتكن $M(x ; y)$ نقطة من المستوي .

برهن أن : $M \in (\gamma)$ إذا وفقط إذا كان $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

ملاحظة : المنحنى (γ) يسمى Cissoïde de Dioclès

6 ــ I نقطة ذات الإحداثيات (0 ; 1) و (E) الدائرة ذات القطر (OI)

(Δ) مماس الدائرة (E) عند النقطة I

(d) المستقيم الذي يشمل O و معامل توجيهه العدد الحقيقي t حيث $t \neq 0$.

عين إحداثيات النقطة M نقطة تقاطع الدائرة (E) و المستقيم (d) حيث M تختلف عن O .

7 ــ عين إحداثيات M' نقطة تقاطع (γ) و المستقيم (d) حيث M' تختلف عن O .

الحـل ــ 53

1 ــ الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن : f ليست قابلة للإشتقاق عند 0

و لدينا

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}$$ لأن $\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ لما $x > 0$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$= 0$$

إذن : f قابلة للإشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق هو 0

2 ــ **التغيرات** : f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]0 ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$= \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$ لأن $x>0$ اذن $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

$$= \frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ على $]0\,;1[$ هي إشارة $3-2x$ فقط لأن $\begin{cases} x>0 \\ (1-x)^2>0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{x}}>0 \end{cases}$

منه جدول إشارة $f'(x)$

x	0	1	3/2	$+\infty$
$3-2x$		+	0	−

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;1[$:

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0}\sqrt{1/y} = +\infty$$

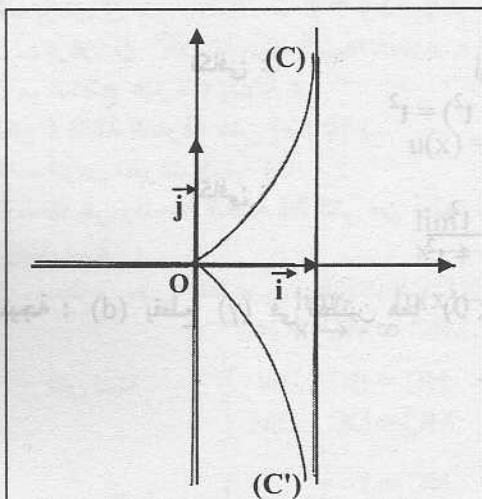
3 ـ معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب من الشكل

$$y = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1/2}} = \dfrac{1}{2(1/4)}\sqrt{1} = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2 \end{cases}$$

منه معادلة (T) : $y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

أي : $y = 2x - \frac{1}{2}$

4 ـ **الإنشاء :**

5 ـ لدينا معادلة المنحنى (C') هي : $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

حيث $x \in [0\,;1[$

إذن تكون $M(x\,;\,y)$ تنتمي إلى $(C) \cup (C')$ إذا وفقط إذا كان

$M \in (C)$ أو $M \in (C')$

أي تكون $M(x\,;\,y)$ تنتمي إلى (γ) إذا وفقط إذا كان

$y = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ أو $y = -\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$

أي : $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x}$

أي : $y^2(1 - x) = x^3$

أي : $y^2 - x\,y^2 = x^3$

أي : $y^2 = x^3 + x\,y^2$

أي : $y^2 = x(x^2 + y^2)$

أي : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ و هو المطلوب .

6 ـ $I(1 ; 0)$ إذن $OI = 1$ منه نصف قطر الدائرة (E) هو $1/2$ و مركزها $w(1/2 ; 0)$ إذن معادلتها

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

أي : $x^2 + y^2 - x = 0$ معادلة (E)

لاحظ أن مماس الدائرة (E) عند النقطة I هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = 1$ (مقارب للمنحنى (C))

(d) يشمل المبدأ و معامل توجيهه t إذن معادلته تكتب من الشكل $y = t\,x$

لتكن $M(x\,;\,y)$ نقطة من (d) أي $M(x\,;\,t\,x)$

تكون M نقطة من (E) إذا وفقط إذا كان : $x^2 + (t\,x)^2 - x = 0$

أي : $x^2 + t^2 x^2 - x = 0$

أي : $x^2(1 + t^2) - x = 0$

أي : $x\,[(1 + t^2)\,x - 1] = 0$

أي : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

منه (d) يقطع (E) في نقطتين هما $O(0\,;\,0)$ و $M\left(\dfrac{1}{1+t^2}\,;\,\dfrac{t}{1+t^2}\right)$

7 ـ لتكن $M'(x\,;\,y)$ نقطة من (d) إذن $M'(x\,;\,t\,x)$

تكون 'M نقطة من (γ) إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \in [0\,;\,1[\\ x(x^2 + t^2 x^2) - t^2 x^2 = 0 \end{cases}$ ......(1)

المعادلة (1) تكافئ : $x^3 + t^2 x^3 - t^2 x^2 = 0$

تكافئ : $x^2(x + t^2 x - t^2) = 0$

تكافئ : $\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{أو} \\ x + t^2 x - t^2 = 0 \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x(1 + t^2) = t^2 \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ الحلين مقبولين لأنهما ينتميان إلى المجال $[0\,;\,1[$

نتيجة : (d) يقطع (γ) في نقطتين هما $O(0\,;\,0)$ و $M'\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\,;\,\dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (C) منحناها البياني في المعلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين نهاية الدالة u عند $-\infty$.

2 ــ بين أن من أجل كل x من IR لدينا : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$

3 ــ استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$

4 ــ بين أن $[u(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$ ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .

5 ــ بين أن من أجل كل x من IR : $u(x) > 0$

6 ــ استنتج اشارة $[u(x) + 2x]$ ثم فسر النتائج هندسيا .

7 ــ نقبل أن الدالة u متناقصة تماما على IR . أرسم المنحنى (C) ومستقيمه المقارب المائل .

الحـل ــ 1

1 ــ
$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

لأن
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$$

2 ــ من أجل كل x من IR لدينا
$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$
$$= (\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
و هو المطلوب .

3 ــ
$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$
لأن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty$

4 ــ
$$\lim_{x \to -\infty} [u(x) + 2x] = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x + 2x$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{u(x)}$$
لأن $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$
$$= 0$$
لأن $\lim_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$

التفسير الهندسي : $\lim_{x \to -\infty} [u(x) + 2x] = 0$ أي $\lim_{x \to -\infty} [u(x) - (-2x)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

5 ــ لندرس إشارة $u(x)$ على IR كما يلي :
$$u(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \text{ .....(1)}$$

نميز حالتين :

الأولى : $x < 0$ في هذ، الحالة المتراجحة (1) دائما محققة .

الثانية : $x \geq 0$ في هذه الحالة المتراجحة (1) تكافئ $x^2 + 1 > x^2$

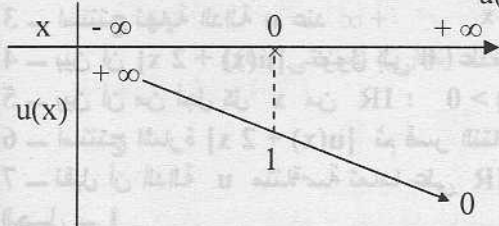
تكافئ $1 > 0$ و هذا محقق دائما .

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x فإن $u(x) > 0$

6 ـ لدينا : $u(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} - x + 2x$

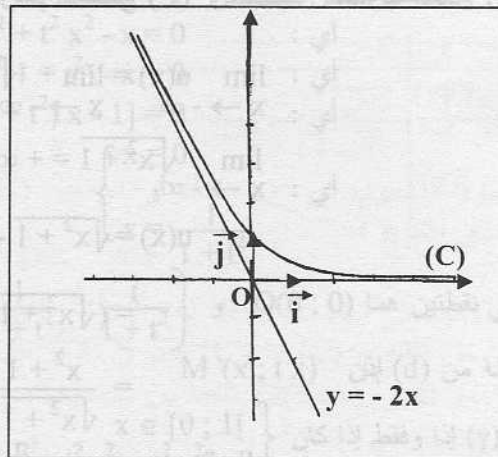
$= \sqrt{x^2+1} + x$

$= \frac{1}{u(x)}$ لأن $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$

إذن : إشارة $u(x) + 2x$ هي إشارة $\frac{1}{u(x)}$ أي موجب تماما لأن $u(x) > 0$

التفسير الهندسي : $[u(x) + 2x] > 0$ تكافئ $u(x) - (-2x) > 0$

أي المنحنى (C) يقع فوق ، مستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = -2x$

7 ـ **الانشاء** : علما أن الدالة u متناقصة على IR نحصل على جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0

منه المنحنى التالي :

التمرين ـ 2

ABCD مربع ضلعه 1 .

(C) هو ربع الدائرة ذات المركز A و نصف القطر [AB] المرسوم داخل المربع .

T نقطة من (C) تختلف عن B و D مماس الدائرة (C) عند النقطة T يقطع [DC] في النقطة M و يقطع [BC] في النقطة N .

نضع $DM = x$ و $BN = y$

1ـ برهن أن .... $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

2 ـ برهن أن .... $MN = x + y$

3 ـ استنتج عبارة y بدلالة x

لتكن f الدالة المعرفة على]0 ; 1[بـ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

4 ـ أدرس تغيرات الدالة f .

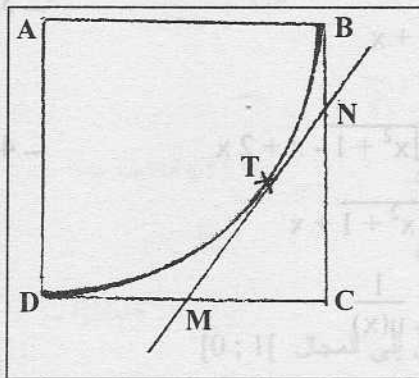
5 ـ ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها تكون المسافة MN أصغر ما يمكن ؟

الحـل ـ 2

1 ـ بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث MNC القائم في C نحصل على :

$MN^2 = MC^2 + NC^2$ ....(1)

لكن لدينا : $\begin{cases} NC = BC - BN \\ MC = DC - DM \end{cases}$

أي : $\begin{cases} NC = 1 - y \\ MC = 1 - x \end{cases}$ لأن $\begin{cases} BC = DC = 1 \\ DM = x \text{ و } BN = y \end{cases}$

إذن المساواة (1) تصبح : $MN^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$

أي : $MN^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$

أي : $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ و هو المطلوب .

2 ـ حسب الشكل لدينا : $MN = MT + TN$ .... (2) و المماس (MN) عمودي على (AT)

لنبحث عن كل من MT و TN :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATN القائم في T نحصل على :

$AN^2 = AT^2 + TN^2$ أي : $AN^2 = 1 + TN^2$ ...... (α)

لأن : AT هو نصف قطر الدائرة (C) أي $AT = 1$

من جهة أخرى بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ABN القائم في B فإن :

$AN^2 = AB^2 + BN^2$ أي : $AN^2 = 1 + y^2$ ...... (β)

بمقارنة العلاقتين (α) و (β) نحصل على : $1 + TN^2 = 1 + y^2$

أي : $TN^2 = y^2$

منه : $TN = y$ ......(3)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATM القائم في T نحصل على :

$AM^2 = AT^2 + MT^2$ أي $AM^2 = 1 + MT^2$ ......(γ)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث AMD القائم في D نحصل على :

$AM^2 = AD^2 + DM^2$ أي : $AM^2 = 1 + x^2$ ......(λ)

بمقارنة العلاقتين (γ) و (λ) نحصل على : $1 + MT^2 = 1 + x^2$

أي : $MT^2 = x^2$

أي : $MT = x$ ......(4)

بتعويض كل من MT و TN في العلاقة (2) نحصل على :

$MN = x + y$ و هو المطلوب .

3 ـ لدينا :
$$\begin{cases} MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\ MN = x + y \end{cases}$$

أي : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $2xy = -2x - 2y + 2$

أي : $2xy + 2y = 2 - 2x$

أي : $2y(x + 1) = 2(1 - x)$

أي : $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ حيث $1 + x \neq 0$ لأن $0 < x < 1$.

وهي عبارة y بدلالة x.

4 ـ تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; 1[$

f دالة ناطقة إذن معرفة و قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها $IR - \{-1\}$ و خاصة على المجال $]0 ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(1 + x) - (1 + x^2)}{(1 + x)^2}$$
$$= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1 + x)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x)^2}$$

من إشارة $x^2 + 2x - 1$ لأن المقام موجب

إشارة $x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

منه :

x	$-1-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}-1$		1
x^2+2x-1	+	0	-		0	+	

إذن : إشارة $f''(x)$ على المجال $]0\,;1[$ كما يلي :

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f''(x)$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0\,;1[$:

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	1

$f(0)=1$

$f(1)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

$f(\sqrt{2}-1)=\dfrac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}-1+1}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$

5 ـ لدينا : $MN=x+y$ و $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

أي : $MN=x+\dfrac{1-x}{1+x}$

أي : $MN=\dfrac{x+x^2+1-x}{1+x}$

أي : $MN=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

أي : $MN=f(x)$

نتيجة : تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت $f(x)$ قيمة حدية صغرى على المجال $]0\,;1[$ و حسب جدول التغيرات فإن هذا محقق من أجل $x=\sqrt{2}-1$.

وعليه تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت المسافة بين النقطة D و النقطة M هي $\sqrt{2}-1$ أي $x=\sqrt{2}-1$

التمرين ـ 3

لتكن f_m دالة معرفة بـ $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$

حيث m وسيط حقيقي غير معدوم .

1 ـ ادرس تغيرات الدالة f_m .

2 ـ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) الممثل للدالة f_m .

3 ـ بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) .

4 ـ ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(1\,;4)$.

الحـل ـ 3

1 ـ دراسة تغيرات الدالة f_m :

f_m معرفة من أجل : $x^2-mx-3\neq 0$

$\Delta=m^2+12>0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+12}}{2} \\ x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+12}}{2} \end{cases}$$

لاحظ أن من أجل كل n من IR فإن $x_1<x_2$ لأن $0>$ $x_1-x_2=\dfrac{-2\sqrt{m^2+12}}{2}<0$

إذن : f_m معرفة على $]-\infty ; x_1[\cup]x_1 ; x_2[\cup]x_2 ; +\infty[$

لاحظ أن : $f_m(x) = \dfrac{x^2 - m x - 3 - 12}{x^2 - m x - 3} = 1 - \dfrac{12}{x^2 - m x - 3}$

إذن :

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = 1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_1} f_m(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_1} f_m(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_2} f_m(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_2} f_m(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = 1$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - m x - 3$		+	0	−	0	+	

f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = \frac{(2x - m)(x^2 - m x - 3) - (2x - m)(x^2 - m x - 15)}{(x^2 - m x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x - m}{(x^2 - m x - 3)^2} \times (x^2 - m x - 3 - x^2 + m x + 15)$$

$$= \frac{12(2x - m)}{(x^2 - m x - 3)^2}$$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة $2x - m$ لأن المقام موجب.

x	$-\infty$	x_1		$m/2$		x_2	$+\infty$
$2x - m$		×	−	0	+	×	

منه جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$		$\frac{m - \sqrt{m^2+12}}{2}$		$\frac{m}{2}$		$\frac{m + \sqrt{m^2+12}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	+	‖	+	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f_m(m/2)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

$$f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 15}{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 3} = \frac{\frac{m^2 - 2m^2 - 60}{4}}{\frac{m^2 - 2m^2 - 12}{4}} = \frac{m^2 - 2m^2 - 60}{m^2 - 2m^2 - 12}$$

2 ـــ من جدول تغيرات الدالة f_m نستنتج معادلات المستقيمات المقاربة كما يلي :

المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{m - \sqrt{m^2+12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{m + \sqrt{m^2+12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

3 ـــ لتكن $M(\alpha ; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون M تنتمي إلى كل لمنحنيات (C_m) إذا و فقط إذا تحقق أن :

من أجل كل m من IR فإن : $f_m(\alpha) = \beta$

أي من أجل كل m من IR : $\dfrac{\alpha^2 - m\alpha - 15}{\alpha^2 - m\alpha - 3} = \beta$

أي من أجل كل m من IR : $\alpha^2 - m\,\alpha - 15 = \beta(\alpha^2 - m\,\alpha - 3)$

أي من أجل كل m من IR : $\alpha^2 - \beta\,\alpha^2 - 15 + 3\,\beta + m(\alpha\,\beta - \alpha) = 0$

أي بالمطابقة :
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta\,\alpha^2 - 15 + 3\,\beta = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \alpha\,\beta - \alpha = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تكافئ $\alpha\,(\beta - 1) = 0$ أي $(\alpha = 0$ أو $\beta = 1)$

✓ من أجل $\alpha = 0$ المعادلة (1) تصبح : $-15 + 3\,\beta = 0$ أي $\beta = 5$

✓ من أجل $\beta = 1$ المعادلة (1) تصبح $-15 + 3 = 0$ مستحيل .

نتيجة : $\alpha = 0$ و $\beta = 5$

خلاصة : توجد نقطة وحيدة M احداثياتها $M(0\,;5)$ تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) . (من أجل أي قيمة لـ m) .

4 ــ تكون النقطة ذات الإحداثيات $(4\,;1)$ تنتمي إلى المنحنى (C_m) إذا و فقط إذا كان $f_m(4) = 1$

أي : $\dfrac{16 - 4\,m - 15}{16 - 4\,m - 3} = 1 \Leftrightarrow 16 - 4\,m - 15 = 16 - 4\,m - 3$

$\Leftrightarrow -15 = -3$ مستحيل

إذن : لا يوجد أي منحنى يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(4\,;1)$

ملاحظة : يمكن الاجابة على هذا السؤال بملاحظة جدول تغيرات الدالة f_m حيث $f_m(x)$ لا يأخذ أبدا القيمة 1 مهما كان العدد الحقيقي m .

التمرين ــ 3

نضع كرة ذات نصف القطر R داخل مخروط دوراني قياس نصف زاوية رأسه هي θ حيث $0 < \theta < \pi/2$
نفرض أن الكرة و المخروط الدوراني متماسان و نقبل أن حجمه v يحقق العلاقة :

$$v = \frac{\pi R^3(1 + \sin\theta)^2}{3\sin\theta(1 - \sin\theta)}$$

1 ــ برهن أن الارتفاع h و الحجم v للمخروط الدوراني يحققان العلاقة :

$$v = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta$$

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0\,;1[$ بـ $f(x) = \dfrac{(1 + x)^2}{x(1 - x)}$

3 ــ استنتج أنه يوجد مخروط دوراني له أصغر حجم ممكن نرمز له بـ v_0 من أجل قيس نصف زاوية رأسه θ_0 يطلب تعيين كل من θ_0 و v_0 .

4 ــ أحسب الارتفاع h_0 للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

الحـل ــ 3

1 ــ لدين $v = \dfrac{1}{3}Sh$ حيث $\left.\begin{matrix} S \\ h \end{matrix}\right\}$: مساحة قاعدة المخروط الدوراني . / : ارتفاع المخروط الدوراني .

و حسب الشكل فإن : $S = \pi\,AB^2$ حيث $[AB]$ هو نصف قطر قاعدة المخروط .

من جهة أخرى لدينا : $\tan\theta = \dfrac{AB}{h}$ لأن المثلث OAB قائم في A .

أي : $AB = h\tan\theta$

منه : $S = \pi(h\tan\theta)^2$ أي $S = \pi\,h^2\tan^2\theta$

إذن : $v = \dfrac{1}{3}(\pi\,h^2\tan^2\theta) \times h$

أي : $v = \dfrac{\pi\,h^3}{3}\tan^2\theta$ و هو المطلوب .

2 ــ تغيرات الدالة f على المجال $]0\,;1[$

f دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على $]0\,;1[$ و دالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2(1 + x)\,x(1 - x) - (1 - 2\,x)(1 + x)^2}{[x(1 - x)]^2}$$

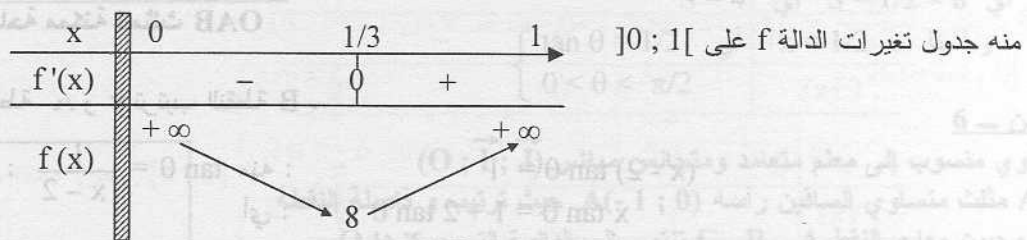
$$= (1+x) \times \frac{2x - 2x^2 - (1 + x - 2x - 2x^2)}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{3x-1}{[x(1-x)]^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1+x)(3x-1)$ لأن المقام موجب

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$			
$3x-1$				$-$	0	$+$	
$(1+x)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0;1[$

x	0		$1/3$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

3 ـ لاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى محلية على المجال $]0;1[$ و هي 8 من أجل $x = 1/3$

إذا وضعنا $x = \sin\theta$ نحصل على $v = \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$ حيث $0 < x < 1$ لأن $0 < \theta < \pi/2$

أي $v = \frac{\pi R^3}{3} f(x)$

منه : يكون v أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $f(x)$ أصغر ما يمكن

و حسب تغيرات الدالة f فإن هذا محقق من أجل $x = 1/3$

أي : $\sin\theta = 1/3$ إذن θ_0 هي الزاوية التي تحقق $\begin{cases} 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ \sin\theta_0 = 1/3 \end{cases}$

و في هذه الحالة لدينا $v_0 = \frac{\pi R^3}{3} f(1/3)$ أي $v_0 = \frac{8}{3}\pi R^3$

4 ـ حسب العلاقة $v = \frac{\pi h^3}{3}\tan^2\theta$ فإن : $v_0 = \frac{\pi h_0^3}{3}\tan^2\theta_0$

أي : $\frac{8\pi R^3}{3} = \frac{\pi h_0^3}{3}\tan^2\theta_0$

أي : $8R^3 = h_0^3 \tan^2\theta_0$

أي : $(1)\ldots\ldots\ h_0^3 = \frac{8R^3}{\tan^2\theta_0}$

لكن $\sin\theta_0 = 1/3$ إذن : $\sin^2\theta_0 = 1/9$

و لدينا : $\cos^2\theta_0 = 1 - \sin^2\theta_0$ أي $\cos^2\theta_0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

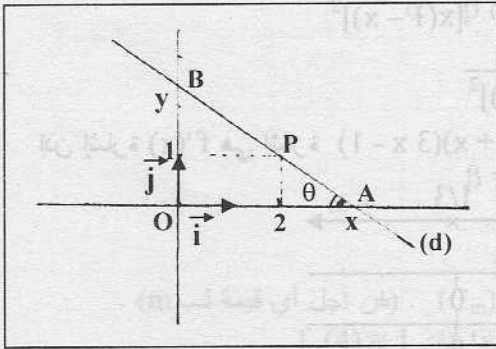
إذن : $\tan^2\theta_0 = \frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0}$ أي $\tan^2\theta_0 = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8}$

منه العلاقة (1) تصبح :

$h_0^3 = \frac{8R^3}{1/8}$ أي : $h_0^3 = 64R^3$

أي : $h_0^3 = (4R)^3$

منه : $h_0 = 4R$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 5

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
نعتبر النقطة p ذات الاحداثيات $(2 ; 1)$
(d) مستقيم يشمل p ويقطع كل من (ox) و (oy) في النقطتين A و B
على الترتيب حيث ترتيب النقطة B يكون أكبر من 1

نضع θ القيس بالراديان للزاوية $\widehat{OAB}$ حيث $0 < \theta < \pi/2$

1 ـ أحسب بدلالة $\tan\theta$ كل من فاصلة النقطة A و ترتيب النقطة B
2 ـ استنتج عبارة مساحة المثلث OAB بدلالة $\tan\theta$
لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$
3 ـ أدرس تغيرات الدالة f
4 ـ استنتج أصغر مساحة ممكنة للمثلث OAB

الحـل ـ 5

1 ـ لتكن x فاصلة النقطة A و y ترتيب النقطة B .

حسب الشكل لدينا : $\tan\theta = \frac{1}{x-2}$ منه : $(x - 2)\tan\theta = 1$

أي : $x\tan\theta = 1 + 2\tan\theta$

أي : $x = \frac{1}{\tan\theta} + 2$ و هو المطلوب .

حسب الشكل دائما : $\tan\theta = \frac{y-1}{2}$ منه : $2\tan\theta = y - 1$

أي : $y = 1 + 2\tan\theta$ و هو المطلوب .

2 ـ مساحة المثلث OAB هي : $S = \frac{1}{2}xy$ أي $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{\tan\theta})(1 + 2\tan\theta)$

3 ـ تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و خاصة على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(1 + 2x) + 2(2 + \frac{1}{x})$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 4 + \frac{2}{x}$$

$$= 4 - \frac{1}{x^2}$$

$= \frac{4x^2 - 1}{x^2}$ من اشارة $4x^2 - 1$ لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 1$		+	0	−	0	+	

جدول تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$:

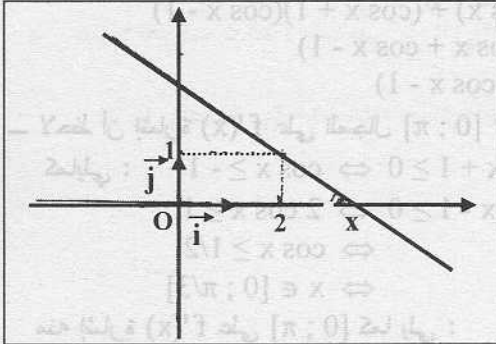
x	0		$1/2$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$f(1/2) = (2 + 2)(1 + 1) = 8$$

4 ــ حسب السؤال (2) لدينا مساحة المثلث OAB هي $S = \frac{1}{2}\,(2 + \frac{1}{\tan\theta})(1 + 2\tan\theta)$

نضع $\tan\theta = x$ حيث $0 < \theta < \pi/2$ إذن : $\tan\theta > 0$ أي : $x \in]0\,;+\infty[$

منه : عبارة المساحة S تصبح : $S = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$

حيث $x = \tan\theta$

أي : $S = \frac{1}{2} f(x)$

نتيجة : بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى على المجال $]0\,;+\infty[$ و هي 8 من أجل $x = 1/2$ فإن المساحة S تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = 1/2$ و $f(x) = 8$

أي $S = 1/2 \times 8$ أي $S = 4$

و لدينا $x = 1/2$ أي $\begin{cases} \tan\theta = 1/2 \\ 0 < \theta < \pi/2 \end{cases}$

<u>التمرين ــ 6</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه $A(-1\,;0)$ حيث ترتيب و فاصلة النقطة B موجبين معا و النقط A , B , C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 .

نسمي H المسقط العمودي للنقطة B على محور الفواصل .

ليكن α قيسا رئيسيا موجبا بالراديان للزاوية $(\vec{I}\,;\overrightarrow{OB})$

1 ــ عين احداثيات النقطة B .

2 ــ عبر عن المسافتين BH و AH بدلالة α

3 ــ استنتج عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة α

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0\,;\pi]$ بـ $f(x) = si \quad - \cos x)$

4 ــ برهن أن من أجل كل x من $[0\,;\pi]$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

5 ــ استنتج أن من أجل كل x من $[0\,;\pi]$: $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

6 ــ أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على $[0\,;\pi]$

7 ــ برهن أنه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن المطلوب تحديدها .

<u>الحـل ــ 6</u>

1 ــ بما أن نصف قطر الدائرة هو 1 فإن يمكن اعتبارها دائرة مثلثية .

و عليه فاصلة النقطة B هو $\cos\alpha$ و ترتيبها هو $\sin\alpha$ لأن النقطة B تنتمي إلى الدائرة المثلثية أي $B(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$

2 ــ حسب الشكل لدينا $AH = 1 + OH$ منه $AH = 1 + \cos\alpha$

و BH هو ترتيب النقطة B أي $BH = \sin\alpha$

3 ــ لاحظ أن مساحة المثلث ABC هي ضعف مساحة المثلث AHB

مساحة المثلث AHB هي : $\frac{1}{2}\,AH \times HB$ (قائم الزاوية في H)

أي : مساحة المثلث ABC هي : $S = 2 \times (\frac{1}{2}\,AH \times HB)$

أي : $S = AH \times HB$

منه : $S = \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)$ و هو المطلوب

4 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و خاصة على $[0\,;\pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \cos x\,(1 + \cos x) - \sin x \times \sin x$$
$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$ لأن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$$= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$ وهو المطلوب

5 ـ لدينا من أجل كل x من $[0 ; \pi]$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ ....(1)

$= (\cos^2 x + \cos x) + (\cos^2 x - 1)$

$= \cos x(1 + \cos x) + (\cos x + 1)(\cos x - 1)$

$= (\cos x + 1)(\cos x + \cos x - 1)$

$= (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$ وهو المطلوب

6 ـ لاحظ أن إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; \pi]$ هي إشارة $(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

كمايلي : $\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ و هذا محقق دائما .

$2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos x \geq 1$

$\Leftrightarrow \cos x \geq 1/2$

$\Leftrightarrow x \in [0 ; \pi/3]$

منه إشارة $f'(x)$ على $[0 ; \pi]$ كما يلي :

x	0		$\pi/3$		π
$\cos x + 1$			$+$		0
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$:

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

$f(0) = \sin 0(1 + \cos 0) = 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}(1 + \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f(\pi) = \sin\pi(1 + \cos\pi) = 0$

7 ـ حسب السؤال (3) لدينا مساحة المثلث ABC هي : $S = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$

بوضع $x = \alpha$ نحصل على $S = \sin x(1 + \cos x)$ مع $0 < x < \pi$

أي : $S = f(x)$

و حسب السؤال (6) فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى محلية على المجال $]0 ; \pi[$ قيمتها $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

و ذلك من أجل $x = \pi/3$:

إذن : مساحة المثلث ABC تكون أكبر ما يمكن من أجل $\alpha = \pi/3$ و تقدر في هذه الحالة بـ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

التمرين ـ 7

f دالة معرفة على $IR - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$.

1 ـ برهن أن يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل x من $IR - \{-2\}$:

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$$

2 ـ أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3 ـ أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

نسمي (γ) القطع المكافئ ذوالمعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ حيث $x \neq -2$

P و M نقطتان من (γ) و (C) على الترتيب لهما نفس الفاصلة x

4 ـ عين مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$

5 ـ استنتج أن لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0 ثم فسر هندسيا هذه النتيجة .

6 ـ أرسم كل من (γ) و (C)

الحـل ـ 7

1 ـ ليكن $x \in IR -\{-2\}$ لدينا :
$$a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2} = \frac{(a\,x^2 - 2\,a\,x + a)(x+2) + b}{x+2}$$
$$= \frac{a\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 2\,a\,x^2 - 4\,a\,x + a\,x + 2\,a + b}{x+2}$$
$$= \frac{a\,x^3 - 3\,a\,x + 2\,a + b}{x+2}$$
$$= \frac{2(a\,x^3 - 3\,a\,x + 2\,a + b)}{2(x+2)}$$
$$= \frac{2\,a\,x^3 - 6\,a\,x + 4\,a + 2\,b}{2(x+2)}$$

نتيجة : يكون $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$ من أجل كل x من $IR -\{-2\}$

إذا وفقط إذا كان :
$$\begin{cases} 2\,a = 1 \\ 6\,a = 3 \\ 4\,a + 2\,b = -6 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ a = 1/2 \\ 2\,b = -6 - 4\,a \end{cases}$$

أي : $\begin{cases} a = 1/2 \\ 2\,b = -6 - 2 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases}$

أخيرا : من أجل كل $x \in IR -\{-2\}$ فإن : $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}$

2 ـ النهايات :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ <}} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

3 ـ التغيرات : الدالة f ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :
$$f'(x) = \frac{(3\,x^2 - 3)(2\,x + 4) - 2(x^3 - 3\,x - 6)}{[2(x+2)]^2}$$
$$= \frac{6\,x^3 + 12\,x^2 - 6\,x - 12 - 2\,x^3 + 6\,x + 12}{4(x+2)^2}$$
$$= \frac{4\,x^3 + 12\,x^2}{4(x+2)^2}$$
$$= \frac{4\,x^2(x+3)}{4(x+2)^2}$$
$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2(x+3)$ لأن المقام موجب كمايلي :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
x^2		+					0	+	
$x+3$		-	0		+				
$x^2(x+3)$		-	0	+			0	+	

منه إشارة $f'(x)$ على D_f :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	+	0	+	

إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	+	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	12	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$-3/2$	↗	$+\infty$

$$f(-3) = \frac{-27+9-6}{-2} = 12$$

$$f(0) = -6/4 = -3/2$$

4 ــ $P \in (C)$ إذن : احداثيات P هي $(x\,;f(x))$ أي : $P(x\,;\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2})$ حيث $x \neq -2$

$M \in (\gamma)$ إذن : احداثيات M هي $M(x\,;\frac{1}{2}(x-1))$ حيث $x \neq -2$

منه

$$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x-x \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - [\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}] \end{pmatrix}$$

أي :

$$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{x+2} \end{pmatrix} \text{ مع } x \neq -2$$

5 ــ لما x يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$ لدينا $\frac{4}{x+2}$ يؤول إلى 0 منه مركبات الشعاع $\overrightarrow{PM}$ هي $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ حيث α يؤول إلى 0

و عليه $PM = \sqrt{0+\alpha^2}$ أي $PM = \sqrt{\alpha^2}$ مع α يؤول إلى 0

إذن : لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0

أي : كلما اقترب العدد x من $-\infty$ أو $+\infty$ فإن النقطة P تقترب أكثر فأكثر من النقطة M لأن المسافة بينهما تقترب من 0

و هندسيا فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (γ) لما x يقترب من $+\infty$ أو $-\infty$.

6 ــ **الانشاء** : لانشاء المنحنيين (C) و (γ) ندرس الوضعية النسبية لــ (C) بالنسبة إلى (γ) كمايلي :

$$f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{-4}{x+2}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\frac{-4}{x+2}$		+	‖	-	

لما $x \in]-\infty\,;-2[$ (C) فوق (γ)

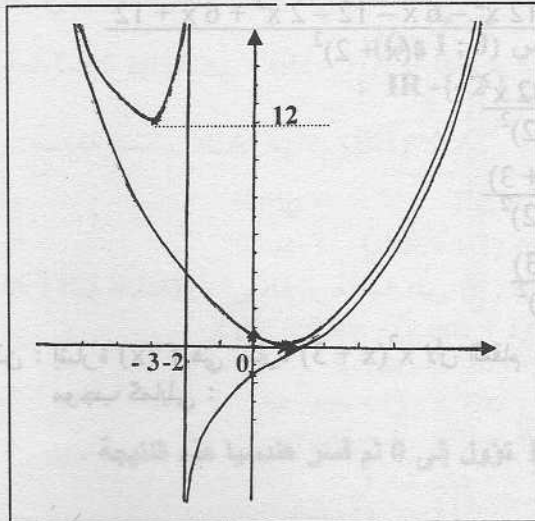
لما $x \in]-2\,;+\infty[$ (C) تحت (γ)

لندرس تغيرات الدالة $g : x \longmapsto \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$g'(x) = x - 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

منه الانشاء كما يلي :

التمرين ــ 8

λ عدد حقيقي موجب تماما . f_λ دالة معرفة على المجال $I =]0 ; +\infty[$ بـ $f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$

و (C_λ) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس نهايتي الدالة f_λ على حدود المجال I .

2 ــ برهن أن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_λ) يطلب معادلته ووضعيته النسبية بالنسبة إلى المنحنى (C_λ) .

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f_λ على المجال I .

4 ــ برهن أن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية تبلغها عند عدد حقيقي x_λ .

لتكن P_λ النقطة من (C_λ) التي فاصلتها x_λ .

5 ــ برهن أن مجموعة النقط P_λ محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

الحـل ــ 8

1 ــ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_\lambda(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda^2}{x^3} = 0$

2 ــ لدينا : $\lim_{x \to +\infty} [f_\lambda(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} - x$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$

$= 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_λ) في جوار $+\infty$

الوضعية النسبية لـ (C_λ) و المستقيم المقارب المائل :

$$f_\lambda(x) - x = \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$$

بما أن $\lambda > 0$ و $x \in]0 ; +\infty[$

فإن : $\frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} > 0$

أي : المنحنى (C_λ) يقع دائما فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x$

التغيرات :

f_λ دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها خاصة على المجال $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f_\lambda'(x) = 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2 x^2}{x^6}$$

$$= 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4}$$

إذن إشارة $f_\lambda'(x)$ هي إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ لأن المقام موجب لندرس إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ كمايلي :

نضع $\alpha = x^2$ حيث $\alpha \geq 0$

إذن : ندرس إشارة كثير الحدود $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2$ ذات المجهول α الموجب .

$$\Delta = 4\lambda^2 + 12\lambda^2 = 16\lambda^2 = (4\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\lambda - 4\lambda}{2} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda \\ \alpha_2 = \frac{2\lambda + 4\lambda}{2} = \frac{6\lambda}{2} = 3\lambda \end{cases}$$

نتيجة : $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2 = (\alpha+\lambda)(\alpha - 3\lambda)$

منه : $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2 = (x^2+\lambda)(x^2 - 3\lambda)$

إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ هي إشارة الجداء $(x^2+\lambda)(x^2-3\lambda)$ كمايلي :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3\lambda}$		0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$x^2+\lambda$ مع $\lambda > 0$					+				
$x^2 - 3\lambda$		+	0	-		-	0	+	
الجداء		+	0	-		-	0	+	

منه جدول إشارة $f_\lambda'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		-	0	+	

إذن : جدول تغيرات الدالة f_λ كما يلي :

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		-	0	+	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$	↗	$+\infty$

$$f_\lambda(\sqrt{3\lambda}) = \sqrt{3\lambda} + \frac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\lambda^2}{3\lambda\sqrt{3\lambda}} = \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}$$

4 ـ حسب جدول التغيرات فإن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية صغرى محلية هي $f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$ تبلغها عند $x_\lambda = \sqrt{3\lambda}$

5 ـ لتكن (γ) مجموعة النقط P_λ ذات الفاصلة $x_\lambda \neq 0$

أي $P_\lambda\left(\sqrt{3\lambda}\ ;\ \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}\right)$

لاحظ أن من أجل كل λ موجب تماما فإن $\sqrt{3\lambda} \neq 0$ إذن $x_\lambda \neq 0$

منه :

$$\frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{\sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{9+6+1}{9}$$

$$= \frac{16}{9}$$

نتيجة : $\frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{16}{9}$ منه $y_\lambda = \frac{16}{9}x_\lambda$

إذن : مجموعة النقط $P_\lambda(x ; y)$ حيث $x = x_\lambda$ تحقق المعادلة $y = \frac{16}{9}x$ من أجل $x > 0$ لأن $\sqrt{3\lambda} > 0$

إذن : المجموعة (γ) جزء محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

<u>التمرين ـ 9</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ نسمي (C) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .
2 ــ عين الدالة المشتقة الثانية للدالة f ثم أدرس إشارتها .
3 ــ أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
لتكن g الدالة المعرفة بــ $g(x) = f(x) - x$
4 ــ بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1 ; 2[$ يحقق $g(\alpha) = 0$ ثم استنتج عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$
5 ــ لتكن (γ) مجموعة النقط $M(y ; x)$ من المستوي حيث $x \in IR$ و $y = f(x)$
أوجد طريقة هندسية لإنشاء مجموعة النقط (γ) باستعمال المنحنى (C)
6 ــ أنشئ كل من (C) و (γ) في نفس المعلم .

<u>الحـل ــ 9</u>

1 ــ f معرفة على IR لأن من أجل كل x من IR فإن $x^2 + 1 > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$ لأن $x < 0$ إذن $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= 0$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$ لأن $x > 0$ إذن $|x| = x$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= 2$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

إذن :
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	2

لدينا : $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)^{1/2}}$ لأن من أجل $\alpha > 0$ فإن $\sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2}$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= (x^2+1)^{-3/2}$$

منه : $f''(x) = -\frac{3}{2}(2x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}-1}$

$$= -3x(x^2+1)^{-5/2}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2+1)^2 \times \sqrt{x^2+1}}$$

منه : إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x$ لأن $(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1} > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-3x$		+	0	-	

نتيجة : إشارة $f''(x)$ على IR :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

3 ــ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

حيث $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{1\sqrt{1}} = 1 \end{cases}$

منه المعادلة هي : $y = x + 1$

4 ــ لتكن g الدالة المعرفة بـــ $g(x) = f(x) - x$

الدالة g هي مجموع الدالتين $x \mapsto -x$ و $x \mapsto f(x)$ المستمرتين على IR

إذن : g مستمرة على IR و خاصة على $]1 ; 2[$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{4+1}} - 2 = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} < 0$$

نتيجة : $\begin{cases} g \text{ مستمرة على } [1 ; 2] \\ g(1) \times g(2) < 0 \end{cases}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $]1 ; 2[$ حيث $g(\alpha) = 0$

هل α وحيد ؟

لندرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]1 ; 2[$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1$$

لاحظ أن : $\left.\begin{array}{l} x^2+1 > 1 \\ \sqrt{x^2+1} > 1 \end{array}\right\}$

إذن : $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 1$

أي : $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 1$

منه : $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$

أي : $g'(x) < 0$

منه : g متناقصة تماما على IR و خاصة على]2 ; 1[

إذن : العدد α وحيد .

خلاصة : يوجد α وحيد من المجال]2 ; 1[حيث $g(\alpha) = 0$ و عليه فإن المعادلة $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

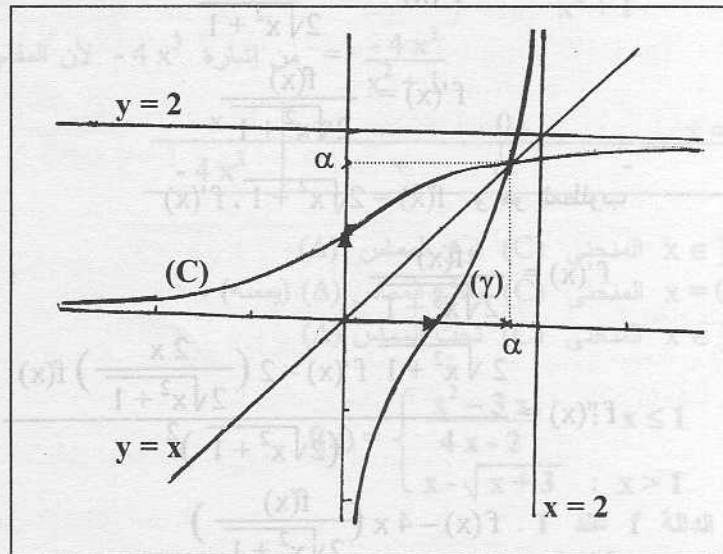
إذن : منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة إحداثياتها$(\alpha ; \alpha)$ حيث $1 < \alpha < 2$

5 ــ لتكن $M(y ; x)$ تنتمي إلى (γ)

إذن $M'(x ; y)$ تنتمي إلى (C) لأن $y = f(x)$

نلاحظ أن النقطة M هي نظيرة النقطة 'M بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

إذن : لإنشاء المجموعة (γ) يكفي إنشاء نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (لاحظ الشكل)

الإنشاء :

التمرين ــ 10

f دالة معرفة بـــ $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

1 ــ عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 ــ تحقق أن : $f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1}$

3 ــ إستنتج أن : $4(x^2+1) f''(x) + 4x f'(x) - f(x) = 0$

الحـل ــ 10

1 ــ

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 0 \text{ .... (1)} \\ x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \text{ .... (2)} \end{cases}$$

المتراجحة (1) دائما محققة

المتراجحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ إذن : نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$

إذن : $-x < 0$ منه المتراجحة (2) دائما محققة لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$

الحالة الثانية : $x \leq 0$

إذن : $-x \geq 0$ منه المتراجحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ حيث $-x \geq 0$

تكافئ $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ و هذا محقق دائما

خلاصة : المتراجحتين (1) و (2) محققتين من أجل $x \in IR$

إذن : $D = IR$

2 ـ f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي : $f(x) = 2\sqrt{x^2+1}\,.\,f'(x)$ و هو المطلوب

3 ـ حسب السؤال (2) لدينا : $f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$

منه :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}\; f'(x) - 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) f(x)}{\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x\left(\frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{4(x^2+1)}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x\, f'(x)}{4(x^2+1)}$$

أي : $4(x^2+1)\, f''(x) = f(x) - 4x\, f'(x)$

أي : $4(x^2+1)\, f''(x) + 4x\, f'(x) - f(x) = 0$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 11

f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + \beta}{x^2+1}$ حيث α و β عددين حقيقيين .

نسمي (C) منحنى الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين قيم α و β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 3$ مماسا لــ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
و ليكن (Δ) هذا المماس .
2 ــ أدرس الوضعية النسبية لــ (C) و (Δ)

الحـل ــ 11

1 ــ معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = f'(0)\,x + f(0)$

بالمطابقة مع المعادلة $y = 4x + 3$ نحصل على : $\begin{cases} f'(0) = 4 \;\ldots\ldots\; (1) \\ f(0) = 3 \;\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$

$f(0) = 3$ أي $\dfrac{3(0) + \alpha(0) + \beta}{0+1} = 3$ أي $\beta = 3$ منه $f(x) = \dfrac{3x^2 + \alpha x + 3}{x^2 + 1}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{(6x + \alpha)(x^2+1) - 2x(3x^2 + \alpha x + 3)}{(x^2+1)^2}$

منه : $f'(0) = \dfrac{(6(0)+\alpha)(0+1) - 0}{(0+1)^2} = \alpha$

إذن : $f'(0) = 4$ يكافئ $\alpha = 4$

خلاصة : $\alpha = 4$ و $\beta = 3$ إذن : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

2 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (Δ) :

$$f(x) - (4x+3) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2+1} - (4x+3)$$
$$= \frac{3x^2 + 4x + 3 - 4x^3 - 4x - 3x^2 - 3}{x^2+1}$$

$= \dfrac{-4x^3}{x^2+1}$ من إشارة $-4x^3$ لأن المقام موجب

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$-4x^3$	+ 0 -

خلاصة : لما $x \in]-\infty\,;0[$ المنحنى (C) فوق المماس (Δ)
لما $x = 0$ المنحنى (C) يقطع المماس (Δ) (يمسه) .
لما $x \in]0\,;+\infty[$ المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

لتمرين ــ 12

f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{4x - 2} & : x \le 1 \\ x - \sqrt{x+3} & : x > 1 \end{cases}$

1 ــ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 1 .
2 ــ فسر هندسيا نتائج السؤال (1) .

الحـل ــ 12

من أجل $x \le 1$ فإن $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{4x - 2}$

إذن : $f(1) = \dfrac{1-3}{4-2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

منه : $\displaystyle\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\dfrac{x^2 - 3x}{4x-2} - (-1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2 - 3x + 4x - 2}{4x-2} \times \frac{1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{(x-1)(x+2)}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x + 2}{4x - 2}$$

$$= \frac{1 + 2}{4 - 2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

من جهة أخرى :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x - \sqrt{x + 3} - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x + 1 - \sqrt{x+3}}{x - 1} \times \frac{x + 1 + \sqrt{x+3}}{x + 1 + \sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x+1)^2 - (\sqrt{x+3})^2}{(x-1)(x + 1 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 3}{(x-1)(x + 1 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x + 1 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x + 1 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x + 2}{x + 1 + \sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{1 + 2}{1 + 1 + \sqrt{1+3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

خلاصة : النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لا تقبل نهاية لما x يؤول إلى 1

إذن : الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 1 .

2 ــ التفسير الهندسي :

لدينا : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ إذن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار النقطة ذات الفاصلة 1 ومعادلته

$$y = \frac{3}{2}(x - 1) + f(1) \quad \text{أي} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 1$$

$$\text{أي} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

و لدينا أيضا : $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$ إذن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 و معادلته

$$y = \frac{3}{4}(x - 1) + f(1) \quad \text{أي} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 1$$

أي $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

التمرين ــ 13

f_m دالة عددية معرفة بــ $f_m(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$ حيث m وسيط حقيقي .

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ لتكن Q نقطة من المستوي إحداثياها $(1 ; 3)$. ما هو عدد المنحنيات (C_m) التي تمر بالنقطة Q ؟
يطلب تعيين قيم m الموافقة .

2 ــ أثبت أن مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة $(2 - m)$ موازي لحامل محور الفواصل .

3 ــ أكتب معادلات مماسات المنحنى (C_m) عند النقطة Q .

الحــل ــ 13

أولا لنحدد مجموعة تعريف الدالة f_m كمايلي :

f_m معرفة من أجل $x + m \neq 0$ أي $x \neq -m$

منه : $D_{f_m} =]-\infty ; -m[\cup]-m ; +\infty[$

1 ــ يكون المنحنى (C_m) يشمل النقطة $Q(1 ; 3)$ إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} x \neq -m \\ f_m(1) = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 1 \neq -m \\ 1 + 1 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{أي} \quad \begin{cases} m \neq -1 \\ 2 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \quad \ldots\ldots (\alpha) \end{cases}$$

لنحل المعادلة (α) ذات المجهول m كمايلي :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2(1+m)^2 + 4}{(1+m)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(1+m)^2 = 2(1+m)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = 2 \\ \text{أو} \\ 1 + m = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \\ \text{أو} \\ m = -3 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \end{cases}$$

نتيجة : يوجد منحنيين يشملان النقطة $Q(1 ; 3)$ و هما C_1 و C_{-3} أي من أجل $m = 1$ و $m = -3$

2 ــ الدالة f_m ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = 1 + \frac{-2 \times 4(x+m)}{(x+m)^4}$$

$$= 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{x+m}\right)^3$$

منه : $f_m'(2-m) = 1 - \left(\frac{2}{2-m+m}\right)^3 = 1 - (1)^3 = 0$

إذن : معامل توجيه مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة $(2 - m)$ معدوم أي هذا المماس يوازي حامل محور الفواصل و معادلته $y = f(2 - m)$

3 ــ يوجد منحنيان فقط يشملان النقطة $Q(1 ; 3)$ كمايلي :

المنحنى الأول : (C_1) إذن $m = 1$

منه $f_1'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+1}\right)^3$

أي : $f_1'(1) = 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 0$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة Q هي : $y = 3$ لأن $f_1'(1) = 0$ و $f_1(1) = 3$

المنحنى الثاني : (C_{-3}) إذن $m = -3$

منه $f_{-3}'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x-3}\right)^3$

أي : $f_{-3}'(1) = 1 - \left(\frac{2}{-2}\right)^3 = 1 + 1 = 2$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_{-3}) عند النقطة Q هي : $y = 2(x-1) + 3$

أي من الشكل $y = 2x + 1$

<u>التمرين ــ 14</u>

لتكن العلاقتين

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \;\ldots\ldots\; (1) \\ x > 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

1 ــ عين قيم x حتى تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة عددية f .

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

3 ــ أثبت أن المنحنى (C) لممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يطلب معادلته .

4 ــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f .

5 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

6 ــ عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

7 ــ أنشئ (C)

<u>الحـل ــ 14</u>

1 ــ تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x \in [-2\,;\,2] \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

أي : $x \in]0\,;\,2]$ و هو المطلوب .

2 ــ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2+\sqrt{4}}{x}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{4}{x}$$
$$= +\infty$$

3 ــ الدالة f معرفة على يسار 2 و $f(2) = \frac{2+\sqrt{4-4}}{2} = 1$

منه :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} - 1}{x-2}$$
$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2+\sqrt{4-x^2}-x}{x} \times \frac{1}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{2-x}{x(x-2)} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}}{-x(2-x)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-1}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-1}{x}\left(1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)$$

$$= -\infty$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة 2 و معادلته $x = 2$

4 ـ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; 2[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x - (2 + \sqrt{4-x^2})}{x^2}$$

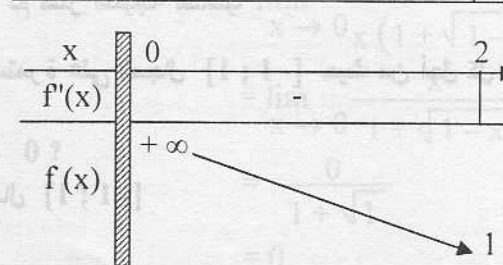
$$= \frac{-\left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2}\right)}{x^2}$$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; 2[$ فإن $f'(x) < 0$ لأن $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} > 0$

5 ـ التغيرات :

إشارة $f'(x)$:

جدول التغيرات :

x	0		2
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1

6 ـ تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : على المجال $]0 ; 2[$ لدينا :

x	0		$\sqrt{2}$		2
x^2-2	‖	$-$	0	$+$	

نميز حالتين كمايلي :

الحالة (1) $0 < x < \sqrt{2}$ إذن : $x^2 - 2 < 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ لا تقبل حلول في R .

الحالة (2) $\sqrt{2} \le x \le 2$ إذن : $x^2 - 2 \ge 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ تكافئ $(x^2-2)^2 = 4 - x^2$

أي : $x^4 - 4x^2 + 4 = 4 - x^2$

أي : $x^4 - 3x^2 = 0$

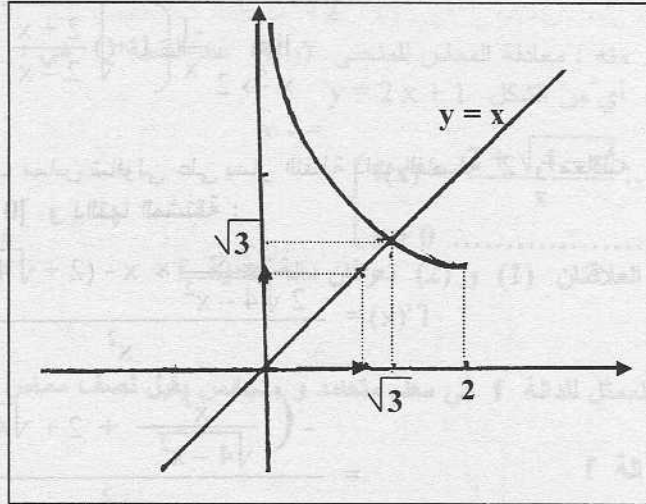
أي : $x^2(x^2-3)=0$

أي : $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

منه : المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $\sqrt{3}$ لأن الحلول الأخرى لا تنتمي إلى المجال $]\sqrt{2};2]$

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في نقطة وحيدة إحداثياها $(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

تحقيق : $f(\sqrt{3})=\dfrac{2+\sqrt{4-3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

الإنشاء :

__التمرين – 15__

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}$

1 – عين D مجموعة تعريف الدالة f

2 – أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3 – أثبت أن يوجد دالة عددية g مستمرة على المجال $[-1;1]$ حيث من أجل كل x من المجال $[-1;0[\cup]0;1]$ فإن $f(x)=g(x)$

4 – هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

5 – أرسم منحنى الدالة g على المجال $[-1;1]$

__الحـل – 15__

– 1

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^4\geq 0 \;........\;(1) \\ x\neq 0 \end{cases}$$

المتراجحة (1) تكافئ $(1+x^2)(1-x^2)\geq 0$

تكافئ $1-x^2\geq 0$ لأن $1+x^2>0$

تكافئ $-1\leq x\leq 1$

نتيجة : f معرفة على المجن $[-1;0[\cup]0;1]$ (لأن $x\neq 0$)

– 2

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \overset{<}{\to} 1}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x \overset{<}{\to} 1}\frac{1-\sqrt{1-x^4}-x}{x}\times\frac{1}{x-1}$$

$$=\lim_{x \overset{<}{\to} 1}\frac{1-x-\sqrt{1-x^4}}{x(x-1)}\times\frac{1-x+\sqrt{1-x^4}}{1-x+\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1 - 2x + x^2 - 1 + x^4}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{4 - x^2})}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x(x-1)(x^2 + x + 2)}{x(x-1)(1 - x + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2 + x + 2}{1 - x + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1 + 1 + 2}{y}$$

$$= +\infty$$

$x^4 + x^2 - 2x$	$x^2 - x$
$x^4 - x^3$	$x^2 + x + 2$
$x^3 + x^2 - 2x$	
$x^3 - x^2$	
$2x^2 - 2x$	
$2x^2 - 2x$	
0	

التفسير الهندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ و معادلته $\begin{cases} x = 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

3 ــ لنحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \frac{0}{1 + \sqrt{1}}$$

$$= 0$$

إذن يمكن تعريف الدالة g كمايلي : $g(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [-1\,;0[\cup]0\,;1] \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

إذن : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = g(0) = 0$

منه : g مستمرة عند 0

إذن : g مستمرة على $[-1\,;1]$ و من أجل كل x من $[-1\,;0[\cup]0\,;1]$

فإن $g(x) = f(x)$ إذن : g هي الدالة المطلوبة .

4 ــ قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x^2\left(1 + \sqrt{1 - x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= 0$$

إذن : الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق $g'(0) = 0$

5 ـ تغيرات الدالة g على المجال $[-1 ; 1]$

g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1 ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ f'(x) & : x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[\end{cases}$$

لنحسب إذن : $f'(x)$ كمايلي على المجال $]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1 - x^4}} \times x - \left(1 - \sqrt{1 - x^4}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^4}{\sqrt{1 - x^4}} - 1 + \sqrt{1 - x^4}}{x^2}$$

$$= \frac{2x^4 - \sqrt{1 - x^4} + 1 - x^4}{x^2\sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \frac{x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2\sqrt{1 - x^4}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4}$ كمايلي :

$$x^4 + 1 - \sqrt{1 - x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 \geq \sqrt{1 - x^4}$$

$$\Leftrightarrow x^8 + 2x^4 + 1 \geq 1 - x^4 \quad \text{مع } x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$$

$$\Leftrightarrow x^8 + 3x^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x^4 + 3) \geq 0$$

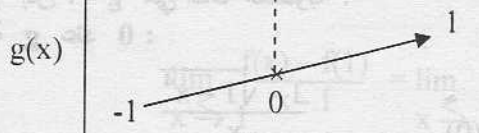
و هذا محقق دائما .

إذن : من أجل كل x من $]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$ فإن $f'(x) > 0$ أي $g'(x) > 0$

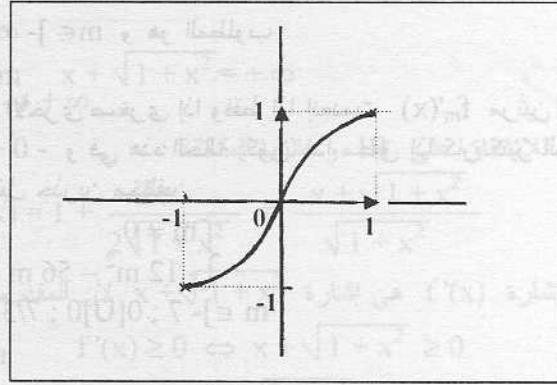
منه : جدول إشارة $g'(x)$:

x	-1		0		1
$g'(x)$	▨	$+$	0	$+$	

إذن : جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	-1		0		1
$g'(x)$	▨	$+$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↗	0	↗	1

$$g(-1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 1}}{-1} = -1$$

$$g(1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 1}}{1} = 1$$

الإنشاء :

التمرين ــ 16

f_m دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ $f_m(x) = \dfrac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ حيث m وسيط حقيقي غير معدوم

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين قيم الوسيط الحقيقي، m حتى تكون الدالة f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها .

2 ــ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى .

3 ــ أثبت أن كل المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياها

4 ــ عين قيم m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = \dfrac{-20}{9}x$

الحـل ــ 16

1 ــ f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها . و دالتها المشتقة :

$$f_m'(x) = \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(x^2 + (m-2)x - 10)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m-2)x^2 - 2(m-2)x - 3(m-2) - [2x^3 + 2(m-2)x^2 - 20x - 2x^2 - 2(m-2)x + 20]}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{x^2(-4 + m - 2 - 2m + 4 + 2) + x(-6 - 2m + 4 + 20 + 2m - 4) - 3m + 6 - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{-mx^2 + 14x - (3m + 14)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة $-mx^2 + 14x - (3m + 14)$ و هو كثير حدود للمتغير x

منه : تكون f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها إذا و فقط إذا

كان $\begin{cases} -m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

لنحسب Δ : $\Delta = (14)^2 - 4(-m)(-3m - 14)$

$= 196 - 4(3m^2 + 14m)$

$= 196 - 12m^2 - 56m$

لاحظ أن Δ هو كثير حدود للمتغير الحقيقي m إذن إشارته تتعلق بالعدد الحقيقي m كمايلي :

إشارة $-12m^2 - 56m + 196$ هي إشارة $-3m^2 - 14m + 49$

$\Delta = (14)^2 - 4(-3)(49)$

$= 196 + 588 = 784 = (28)^2$

$$m_1 = \frac{14 - 28}{-6} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 28}{-6} = \frac{42}{-6} = -7$$

منه جدول إشارة Δ كمايلي :

m	$-\infty$		-7		0		$7/3$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

خلاصة : يكون $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-\infty ; -7]$ و هو المطلوب

2 ــ يكون للدالة f قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى إذا وفقط إذا إنعدمت $f_m'(x)$ مرتين على الأقل مغيرة إشارتها بالتناوب تمايلي + 0 – 0 + أو - 0 + 0 - و في هذه الحالة يكون هذا محقق إذا كان كثير الحدود $- m x^2 + 14 x - (3 m + 14)$ للمتغير الحقيقي x يقبل جذرين مختلفين

أي $\begin{cases} -m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} m \neq 0 \\ -12 m^2 - 56 m + 196 > 0 \end{cases}$

و حسب السؤال (1) فإن $\Delta > 0$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$

منه : قيم m المطلوبة هي $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$

3 ــ لتكن $A(\alpha ; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون A مشتركة لكل المنحنيات (C_m) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $f_m(\alpha) = \beta$

$$\frac{\alpha^2 + (m-2)\alpha - 10}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} = \beta \text{ و } \alpha^2 - 2\alpha - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (m-2)\alpha - 10 = \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha m + \alpha^2 - 2\alpha - 10 - \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0$$

إذن : يكون $f_m(\alpha) = \beta$ من أجل كل m من IR إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 10 - 3(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ -10 + 3\beta = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 10/3 \end{cases}$$

نتيجة : النقطة A ذات الإحداثيات $(0 ; 10/3)$ تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m)

4 ــ يكون مماس المنحنى (C_m) عند النقطة A موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-20}{9} x$ إذا وفقط إذا كان ميله يساوي $-20/9$ أي $f_m'(0) = -20/9$

إذن : $f_m'(0) = \frac{-20}{9} \Leftrightarrow \frac{-(3m + 14)}{9} = \frac{-20}{9}$

$$\Leftrightarrow 3m + 14 = 20$$
$$\Leftrightarrow 3m = 6$$
$$\Leftrightarrow m = 2$$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لــ m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-20}{9} x$ وهي $m = 2$

التمرين ــ 17

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بــ $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ ثم أرسم منحناها (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

2 ــ أكتب العبارة $x - \sqrt{1 + x^2}$ بدلالة $f(x)$ ثم إستنتج عبارة الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ و التي تحقق أن من أجل كل x من IR فإن $g o f(x) = x$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة h المعرفة على *IR بــ $h(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

4 ــ تحقق أن إذا كانت $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى الممثل للدالة h حيث $x > 0$ فإن النقطة $M'(y ; x)$ تنتمي إلى المنحنى (C) ثم إستنتج طريقة هندسية لإنشاء منحنى الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$

الحــل ــ 17

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2})$$
$$= \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2}) \times \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x - \sqrt{1+x^2} = -\infty \quad \text{لأن} \quad = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x + \sqrt{1+x^2}$ لأن المقام موجب .

منه $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq -x$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$ إذن $-x < 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} > -x$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \leq 0$ إذن $-x \geq 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} \geq -x$ تكافئ $1 + x^2 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ و هذا دائما محقق

منه : $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty ; 0]$

خلاصة : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

لاحظ أن :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{1+x^2} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} - x$$

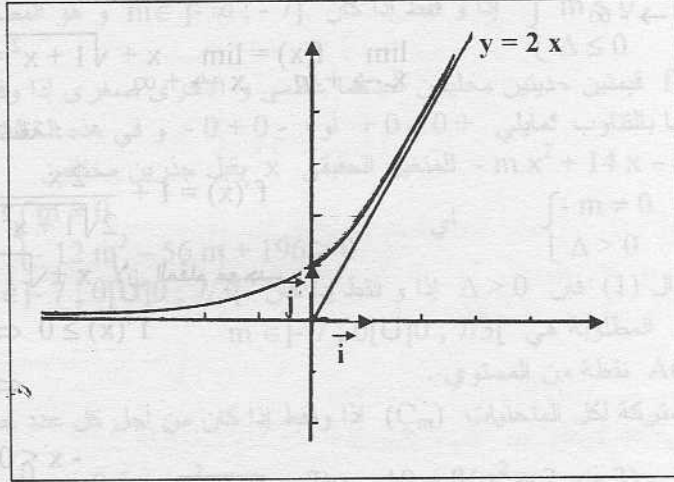
$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) \times \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الإنشاء :

2 ــ لدينا من أجل كل x من IR : $(x + \sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2}) = -1$

أي : $x - \sqrt{1 + x^2} = \frac{-1}{f(x)}$ و هي العلاقة (1)

من جهة أخرى لدينا من أجل كل x من IR : $(x + \sqrt{1 + x^2}) + (x - \sqrt{1 + x^2}) = 2x$

أي : $f(x) + (x - \sqrt{1 + x^2}) = 2x$

أي : $x - \sqrt{1 + x^2} = 2x - f(x)$ و هي العلاقة (2)

لتكن g دالة معرفة على IR حيث $gof(x) = x$

نضع $f(x) = y$ إذن : $g(y) = x \Leftrightarrow gof(x) = x$ ....(3)

لدينا العلاقتين (1) و (2) كمايلي :

$$\begin{cases} x - \sqrt{1 + x^2} = \frac{-1}{f(x)} \\ x - \sqrt{1 + x^2} = 2x - f(x) \end{cases}$$ إذن : $\frac{-1}{f(x)} = 2x - f(x)$

منه : $-\frac{1}{y} = 2x - y$ لأن $y = f(x)$

أي : $y - \frac{1}{y} = 2x$

أي : $\frac{y^2 - 1}{y} = 2x$

أي : $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$ (لأن $f(x) > 0$ أي $y > 0$)

منه العلاقة (3) تصبح : $g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y} \Leftrightarrow gof(x) = x$

و بصفة خاصة : $g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ مع $x > 0$ (لأن $y > 0$)

تحقيق : ليكن x عدد حقيقي،

$$g(f(x)) = g(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^2 - 1}{2(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{1 + x^2} + 1 + x^2 - 1}{2(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

$$= \frac{2x(x + \sqrt{1 + x^2})}{2(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

$g\ o\ f(x) = x$ إذن فعلا : $= x$

3 ــ تغيرات الدالة h : h معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

الدالة h قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{x^2}\right]$$

إذن : من أجل كل x من IR^* : $h'(x) > 0$

منه جدول التغيرات كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4 ــ لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من منحنى الدالة h حيث $x > 0$

لدينا : $h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x حيث $x > 0$

إذن نبحث عن حلولها كمايلي :

$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1 + y^2)$ إذن : المعادلة تقبل حلين كمايلي :

$$x_1 = \frac{2y - 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y - \sqrt{1 + y^2}$$ سالب إذن مرفوض

$$x_2 = \frac{2y + 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y + \sqrt{1 + y^2}$$ موجب إذن مقبول

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا هو $x = y + \sqrt{1 + y^2}$

منه : إذا كانت النقطة $M(x\ ;\ y)$ تنتمي إلى منحنى الدالة h حيث $x > 0$

فإن $M'(y\ ;\ x)$ أي $M'(y\ ;\ y + \sqrt{1 + y^2})$ تنتمي إلى المنحنى (C) لأن : $y + \sqrt{1 + y^2} = f(y)$

منه منحنى الدالة h على المجال $]0\ ;+\infty[$ هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المنصف الأول

التمرين ــ 18

f دالة عددية معرفة على IR بـ $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ احسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ **و** $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$ **. فسر النتائج هندسيا**

3 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحـل ـ 18

1 ـ التغيرات : f معرفة عى IR

لاحظ إشارة $4x^2 - 1$ كمايلي :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	-	0	+	

منه

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2-1} & : x \in]-\infty ; -1/2]\cup[1/2 ; +\infty[\\ x + \sqrt{1-4x^2} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{4x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2(4 - \frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x - x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}$$ لأن $\sqrt{x^2} = -x$ لما $x < 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x(1 - \sqrt{4})$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{4x^2-1} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1/2 ; 1/2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-1}} & : x \in]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[\\ 1 - \frac{8x}{2\sqrt{1-4x^2}} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} & : x \in]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[\\ 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} & : x \in]-1/2 ; 1/2[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

أولا على المجال $]-\infty ; -1/2[\cup]1/2 ; +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2-1}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]1/2 ; +\infty[$ أي $x \geq 0$ منه $-4x \leq 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2-1}}$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$ لما $x \in]1/2 ; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \in]-\infty ; -1/2[$ أي $x \leq 0$ منه $-4x \geq 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2-1}}$ تكافئ $1 \geq \frac{16x^2}{4x^2-1}$

تكافئ $4x^2 - 1 \geq 16x^2$

تكافئ $-12x^2 - 1 \geq 0$

تكافئ $-(12x^2 + 1) \geq 0$ و هذا مستحيل

منه : $f'(x) < 0$ لما $x \in]-\infty ; -1/2[$

خلاصة :

x	$-\infty$	-1/2	1/2	$+\infty$
f'(x)	-	(منطقة مظللة)		+

ثانيا : على المجال $]-1/2 ; 1/2[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]-1/2 ; 0]$ أي $x \leq 0$ منه $4x \leq 0$

إذن المتراجحة $1 > \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$

الحالة الثانية : $x \in]0 ; 1/2[$ أي $x > 0$ منه $4x > 0$

أي المتراجحة $1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ تكافئ $1 \geq \frac{16x^2}{1-4x^2}$

تكافئ $1 - 4x^2 \geq 16x^2$

تكافئ $1 - 20x^2 \geq 0$

تكافئ $x \in [-\frac{1}{\sqrt{20}} ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$

أي $x \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$ لأن في هذه الحالة $x \in]0 ; 1/2[$ فقط

خلاصة :

x	- 1/2		$1/\sqrt{20}$		1/2
f'(x)		+	0	-	

نتيجة : إشارة المشتقة $f'(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$		-1/2		$1/\sqrt{20}$		1/2		$+\infty$
f'(x)		-		+	0	-		+	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1/2		$1/\sqrt{20}$		1/2		$+\infty$
f'(x)		-		+	0	-		+	
f(x)	$+\infty$	↘	- 1/2	↗	$\sqrt{5}/2$	↘	1/2	↗	$+\infty$

$$f(-1/2) = -1/2 + \sqrt{0} = -1/2$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{20}}) = \frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{1 - \frac{4}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 –

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 1}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$$

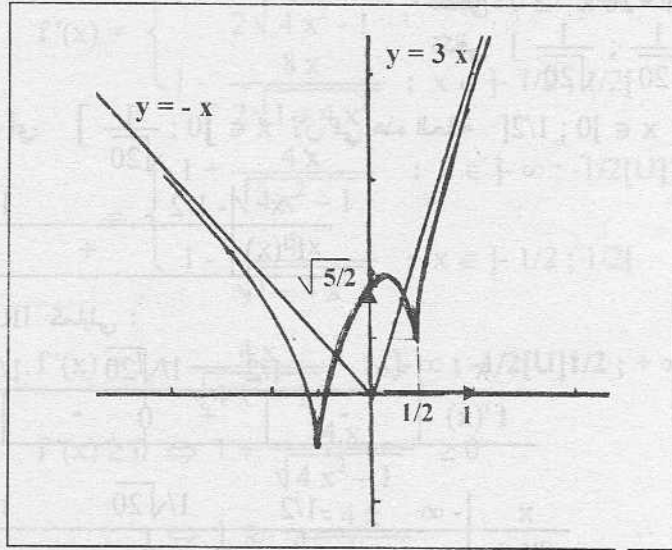
$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 3x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الإنشاء :

التمرين ــ 19

g **دالة عددية معرفة على** IR **بـ** $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g .

2 ــ برهن أن من أجل كل α **من المجال** $]-1\,;\,0[$ **فإن المعادلة** $g(x) = \alpha$ **تقبل حلا وحيدا في** IR .

لتكن f **دالة معرفة على** IR **بـ :** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

و ليكن (C) **منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J})$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f

4 ــ أثبت أن المستقيم (d) **ذو المعادلة** $y = -x + 1$ **مقارب مائل للمنحنى** (C) **في جوار** $-\infty$

5 ــ أدرس الوضعية النسبية لــ (d) **و المنحنى** (C)

6 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C) .

الحـل ـ 19

1 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$ لأن $x < 0$ إذن $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= 0$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

منه : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من IR :

إذن : جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	-1	↗	0

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g لدينا النتائج التالية :

g مستمرة على $]-\infty ; +\infty[$ و g تأخذ قيم في المجال $]-1 ; 0[$
g متزايدة تماما على $]-\infty ; +\infty[$

إذن : من أجل كل α من $]-1 ; 0[$ فإن المعادلة $g(x) = \alpha$ تقبل حلا وحيدا على IR

3 ـ تغيرات الدالة f :

f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ لأن $= 1$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= g(x)$$

و لكن حسب السؤال (1) فإن من أجل كل x من IR فإن $-1 < g(x) < 0$ أي $g(x) < 0$ منه $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$ → $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 1

4 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} - (-x+1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

5 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (d) :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

إذن : إشارة $f(x) - (-x+1)$ هي إشارة $x + \sqrt{x^2+1}$ كمايلي :

$$x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq -x$$

الحالة (1) $x \geq 0$ أي $-x \leq 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

أي : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

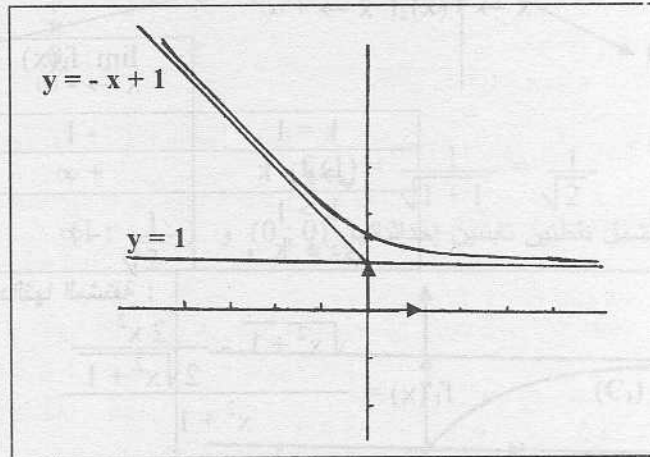
الحالة (2) $x < 0$ أي $-x > 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ تكافئ $x^2 + 1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

خلاصة : من أجل كل x من IR فإن $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ أي المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (d)

6 ــ الإنشاء :

$f(0) = 3/2$

التمرين ــ 20

f_k دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على IR بـ $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (C_k) المنحنى الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أدرس حسب قيم k $(k \geq 1)$ تغيرات الدالة f_k .

2 ــ أثبت أن كل المنحنيات (C_k) الممثلة للدالة f_k في مستوي منسوب إلى معلم تمر بنقطتين ثابتتين يطلب إحداثياتها من أجل $k > 1$

3 ــ أنشئ كل من (C_1) و (C_2) و (C_3)

الحــل ــ 20

1 ــ تغيرات الدالة f_k :

f_k معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k}{|x|\sqrt{1+1/x^2}}$$

$= \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^k}{-x}$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ و $|x| = -x$ في جوار $-\infty$

إذن نميز الحالات التالية :

أولا : $k = 1$ إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$

ثانيا : k زوجي إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} -(x)^{k-1} = +\infty$ لأن $(k-1)$ فردي

ثالثا : k فردي و $k > 1$ إذن $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} -(x)^{k-1} = -\infty$ لأن $(k-1)$ زوجي

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{x\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{x}$$

إذن : نمز الحالات التالية :

أولا : $k = 1$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x/x = 1$

ثانيا : $k > 1$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x)^{k-1} = +\infty$

خلاصة :

	$\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$
$k = 1$	-1	1
k زوجي	$+\infty$	$+\infty$
$k > 1$ و k فردي	$-\infty$	$+\infty$

f_k قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

أولا : $k = 1$

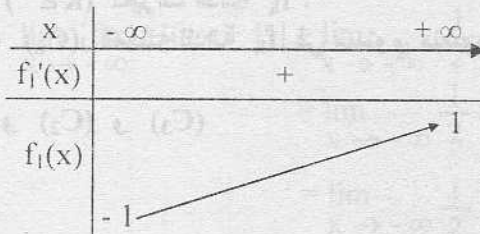
$$f_1'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : $f_1'(x) > 0$ من أجل كل x من IR .

منه جدول التغيرات من أجل $k = 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	
$f_1(x)$	-1 ↗	1

ثانيا : $k > 1$

$$f_k'(x) = \frac{k\,x^{k-1}\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^{k+1}}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{k\,x^{k-1}(x^2+1) - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{k\,x^{k+1} + k\,x^{k-1} - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{k-1}[(k-1)x^2 + k]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي إشارة x^{k-1} لأن $(k-1)x^2 + k > 0$ من أجل $k > 1$ و $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 0$

إذن : نميز حالتين كمايلي :

الحالة الأولى : k زوجي أي $(k-1)$ فردي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{k-1}		-	0	+	

الحالة الثانية : $k > 1$ و k فردي أي $(k-1)$ زوجي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{k-1}		+	0	+	

منه جدول التغيرات التالي :

k زوجي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		-	0	+	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

k فردي $(k > 1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		+	0	+	
$f_k(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2 ـ ليكن $k > 1$

لدينا : $f_k(0) = 0$ و $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : المنحنى (C_k) يشمل نقطتين ثابتتين إحداثياتها $(0 ; 0)$ و $(1 ; \frac{1}{\sqrt{2}})$

3 ـ الإنشاء :

أولا : (C_1) :

(C_1)

0

ثانيا : (C_2) k زوجي

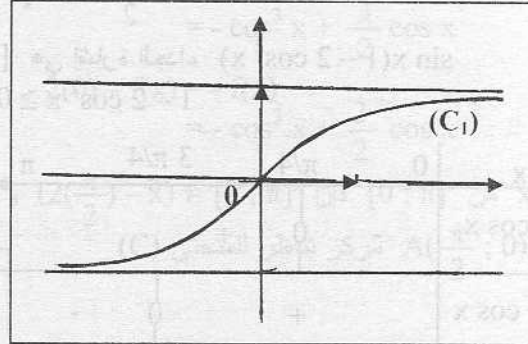
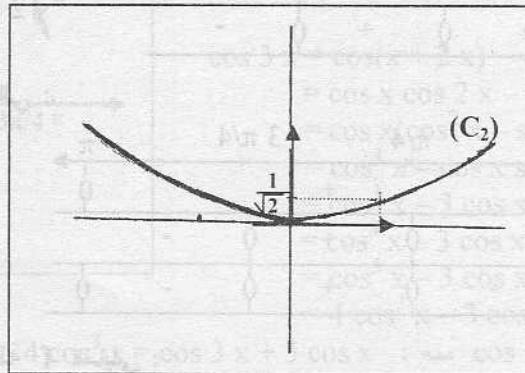
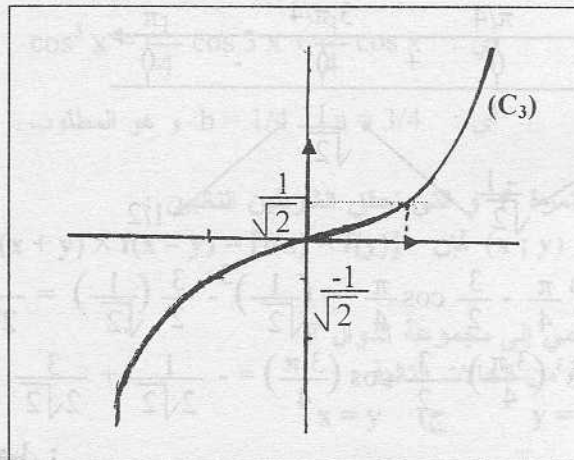
(C_2)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

ثالثا : (C_3) k فردي :

(C_3)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{-1}{\sqrt{2}}$

التمرين ـ 21

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi]$

2 ـ عين نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة f مع حامل محور الفواصل في مستوي منسوب إلى معلم متعامد .
و لتكن A هذه النقطة .
3 ـ أثبت أن A هي مركز تناظر للمنحنى (C)
4 ـ أنشئ بعناية المنحنى (C)
5 ـ أكتب العبارة $\cos^3 x$ من الشكل $a \cos x + b \cos 3x$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

الحـل ـ 21

1 ـ التغيرات : f معرفة على $[0 ; \pi]$

$$f(0) = \cos^3 0 - \frac{3}{2}\cos 0 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \cos^3 \pi - \frac{3}{2}\cos \pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -3 \sin x \cos^2 x + \frac{3}{2}\sin x$$

$$= \frac{3}{2}\sin x\,[1 - 2\cos^2 x]$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على $[0 ; \pi]$ هي إشارة الجداء $\sin x(1 - 2\cos^2 x)$

لدينا : $1 - 2\cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 1/2 \geq \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\right) \geq 0$

x	0		π/4		3π/4		π
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x$		-	0	+		+	
$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x$		+		+	0	-	
الجداء		-	0	+	0	-	

منه جدول الإشارة التالي :

x	0		π/4		3π/4		π
sin x	0			+			0
$1 - 2\cos^2 x$		-	0	+	0	-	
f '(x)	0	-	0	+	0	-	0

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	0		π/4		3π/4		π
f '(x)	0	-	0	+	0	-	0
f (x)	-1/2	↘	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	1/2

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3 \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^3 \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 ـ التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos^2 x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{أو} \\ \cos^2 x = \frac{3}{2} \quad \text{مستحيل} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{لأن} \quad 0 \le x \le \pi$$

نتيجة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A إحداثياتها $A(\pi/2 ; 0)$

3 ـ ليكن $0 \le x \le \pi$ إذن : $-\pi \le -x \le 0$

منه : $0 \le \pi - x \le \pi$

أي : $0 \le 2(\frac{\pi}{2}) - x \le \pi$

و لدينا : $f(\pi - x) = \cos^3(\pi - x) - \frac{3}{2}\cos(\pi - x)$

$$= (-\cos x)^3 - \frac{3}{2}(-\cos x)$$

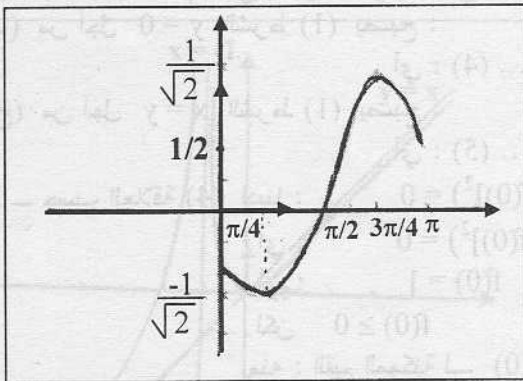
$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x$$

من جهة أخرى : $2(0) - f(x) = -f(x)$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x$$

خلاصة : من أجل كل x من $[0 ; \pi]$ فإن $(2(\frac{\pi}{2}) - x) \in [0 ; \pi]$ و $f(2(\frac{\pi}{2}) - x) = 2(0) - f(x)$

إذن : النقطة $A(\frac{\pi}{2} ; 0)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4 ـ الإنشاء :

5 ـ ليكن $x \in [0 ; \pi]$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x)$$
$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$
$$= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(2 \sin x \cos x)$$
$$= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x)$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

نتيجة : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ منه : $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$

أي : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

أي : $a = 3/4$ و $b = 1/4$ و هو المطلوب

التمرين ـ 22

لتكن F مجموعة الدوال العددية المستمرة f و التي تحقق الشرطين التاليين :

(1) من أجل كل $(x ; y) \in IR^2$ فإن $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$

(2) $f(0) \ge 0$

1 ـ تحقق أن الدالة $x \longmapsto 2^{-x^2}$ تنتمي إلى مجموعة الدوال F

2 ـ عبر عن الشرط (1) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $x = 0$ ب) $y = 0$ ج) $x = y$

3 ـ إستنتج القيم الممكنة لـ $f(0)$

4 ـ أثبت أن $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كانت f هي الدالة $x \longmapsto 0$.

لنفرض أن يوجد عدد حقيقي غير معدوم a حيث $f(a) = 0$

نعرف المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ بـ $u_n = \frac{a}{2^n}$

5 ـ أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة .
6 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $f(u_n) = 0$
7 ـ إستنتج أن $f(0) = 0$

الحـل ـ 22

1 ـ نضع $f(x) = 2^{-x^2}$
لدينا $f(0) = 2^0 = 1$
إذن : $f(0) \geq 0$ منه الشرط (2) محقق .
و من أجل كل x من IR ، من أجل كل y من IR لدينا :

$$f(x+y) \times f(x-y) = 2^{-(x+y)^2} \times 2^{-(x-y)^2}$$
$$= 2^{-x^2-2xy-y^2} \times 2^{-x^2+2xy-y^2}$$
$$= 2^{-2x^2-2y^2}$$
$$[f(x) \times f(y)]^2 = [2^{-x^2} \times 2^{-y^2}]^2$$
$$= [2^{-x^2-y^2}]^2$$
$$= 2^{-2x^2-2y^2}$$

نتيجة : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ أي الشرط (1) محقق .
خلاصة : f تحقق الشرطين (1) و (2) معا و f مستمرة على R إذن f تنتمي إلى مجموعة الدوال F .

2 ـ لدينا : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ من أجل كل $(x ; y) \in IR^2$

أ) من أجل $x = 0$ الشرط (1) يصبح : $f(y) \times f(-y) = [f(0) \times f(y)]^2$
أي : $f(y) \times f(-y) = [f(0)]^2 \times [f(y)]^2 ......(3)$

ب) من أجل $y = 0$ الشرط (1) يصبح : $f(x) \times f(x) = [f(0) \times f(x)]^2$
أي : $[f(x)]^2 = [f(0)]^2 \times [f(x)]^2 .... (4)$

ج) من أجل $x = y$ الشرط (1) يصبح : $f(2x) \times f(0) = [f(x) \times f(x)]^2$
أي : $f(2x) \times f(0) = [f(x)]^4 .... (5)$

3 ـ حسب العلاقة (4) لدينا : $[f(x)]^2(1 - [f(0)]^2) = 0$
أي : $(1 - [f(0)]^2) = 0$ أو $f(x) = 0$
أي : $f(0) = 1$ أو $f(0) = -1$ أو $[f(0) = 0$ و f معدومة أي $f(x) = 0]$
لكن $f(0) \geq 0$
منه : القيم الممكنة لـ $f(0)$ هي 0 أو 1 .

4 ـ حسب العلاقة (4) يكون $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كان $[f(x)]^2 = 0$ من أجل كل $x \in IR$.
أي $f(x) = 0$ من أجل كل $x \in IR$
منه : يكون $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كانت f هي الدالة $x \longmapsto 0$

5 ـ
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a}{2^n}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} 2^n = +\infty$$
$$= 0$$
إذن : المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

6 ـ **البرهان بالتراجع أن من أجل كل n من N :** $f(u_n) = 0$: (في حالة f ليست الدالة $x \longmapsto 0$)
من أجل $n = 0$:
$$f(u_0) = f(\frac{a}{2^0}) = f(a) = 0$$
إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$
نفرض أن $f(u_n) = 0$ من أجل $n > 0$
هل $f(u_{n+1}) = 0$ ؟
لدينا حسب فرضية التراجع : $f(u_n) = 0$

أي $f(\frac{a}{2^n}) = 0$

أي $f(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}) = 0$

أي $f(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}) \times f(0) = 0 \times f(0)$

أي $\left[f(\frac{a}{2^{n+1}})\right]^4 = 0$ حسب العلاقة (5) من السؤال 2 (نضع $x = \frac{a}{2^{n+1}}$)

أي $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0$

أي $f(u_{n+1}) = 0$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

في حالة f هي الدالة $x \longmapsto 0$ فإن $f(u_n) = 0$ محقق من أجل كل n من IN

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$: $f(u_n) = 0$

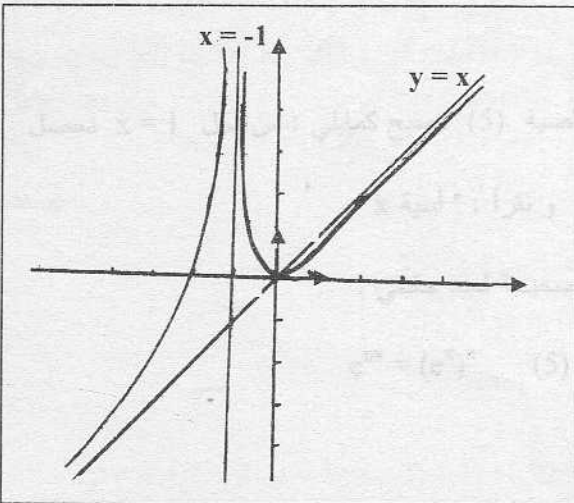
7 ـ لدينا $f(u_n) = 0$ من أجل كل n من IN

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

إذن : $f[\lim\limits_{n \to +\infty} u_n] = 0$ لأن f مستمرة على IR

أي : $f(0) = 0$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ـ 23</u>

f دالة معرفة على IR - {-1} بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

g دالة معرفة على IR بـ $g(x) = |x|$

من أجل كل x من IR نعرف الدالة ϕ كمايلي : $\phi(x) = fog(x)$

1 ـ برهن أن الدالة ϕ زوجية

2 ـ تحقق أن : من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$

فإن $\phi(x) = f(x)$

3 ـ إستنتج طريقة بسيطة لرسم منحنى الدالة ϕ على IR دون دراسة تغيرات الدالة ϕ . ثم أرسم المنحنى (γ) الممثل للدالة ϕ .

<u>الحــل ـ 23</u>

1 ـ ليكن $x \in IR$ إذن : $fog(x) = f(g(x)) = f(|x|)$

منه : $\phi(x) = f(|x|)$

$$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x|+1)^2}$$

إذن : ϕ معرفة على IR

و لدينا : من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $\phi(-x) = \frac{|-x|^3 + 2|-x|^2}{(|-x|+1)^2}$

$$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x|+1)^2}$$

$$= \phi(x)$$

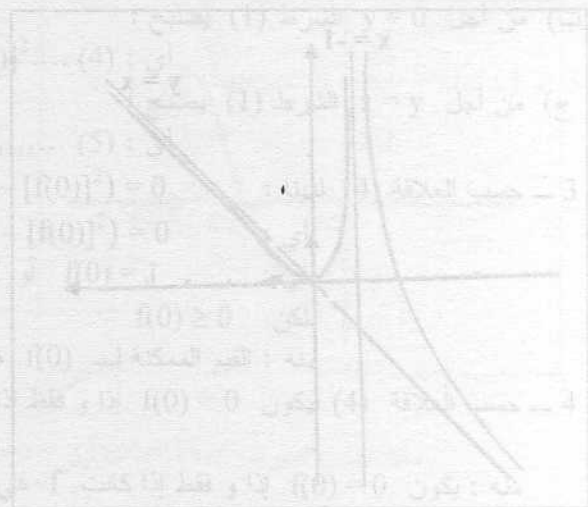
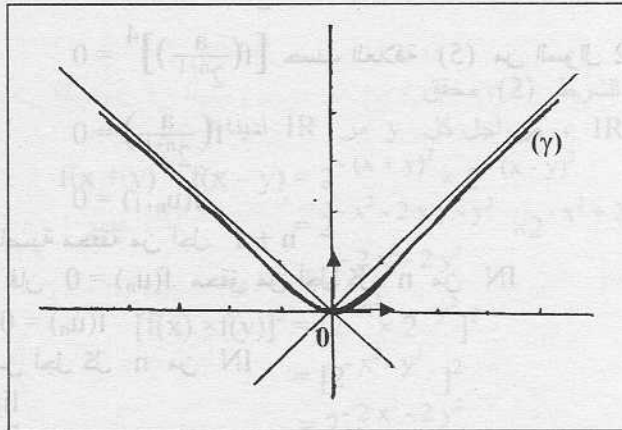
إذن : الدالة ϕ زوجية .

2 ـ ليكن $x \in [0 ; +\infty[$ إذن : $|x| = x$

منه : $\phi(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$

أي : $\phi(x) = f(x)$ و هو المطلوب

3 ــ ϕ دالة زوجية إذن يكفي رسم منحناها على المجال $[0\,;+\infty[$ ثم إستنتاج الجزء الأخر على المجال $]-\infty\,;0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

و لكن لما $x \in [0\,;+\infty[$ لدينا $\phi(x) = f(x)$ أي منحنى الدالة ϕ على المجال $[0\,;+\infty[$ ينطبق على جزء المنحنى (C) على المجال $[0\,;+\infty[$ إذن : نرسم هذا الجزء ثم نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب كمايلي :

الدوال الأسية و اللوغارتمية

I ـــ الدوال الأسية

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على IR و تحقق الشرطين التاليين :

$$\begin{cases} (1)........ f'(x) = f(x) \\ (2)............f(0) = 1 \end{cases}$$

هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية و نرمز لها بالرمز exp

إذن الشرطين (1) و (2) يكتبان من الشكل :

$$\begin{cases} '(1)...... \exp'(x) = \exp(x) \\ '(2)...... ...... \exp(0) = 1 \end{cases}$$

الخواص الجبرية للدالة exp

من أجل كل عددين حقيقيين x و y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا :

(1) $\exp(x) \neq 0$

(2) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(3) $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

(4) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

(5) $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

العدد e

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة exp أي $\exp(1) = e$ إذن : الخاصية (5) تصبح كمايلي : من أجل $x = 1$ نحصل على $\exp(n) = [\exp(1)]^n$ أي $\exp(n) = e^n$

نعمم إصطلاحا هذه النتيجة من أجل كل عدد حقيقي x بـــ $\exp(x) = e^x$ و نقرأ : " أسية x "

ملاحظة (1) : العدد e تقريبا يساوي 2,718281828

ملاحظة (2) : الخواص الجبرية للدالة exp متلائمة مع خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي .

و تكتب باستعمال العدد e كمايلي :

(1) $e^0 = 1$ (3) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ (5) $e^{nx} = (e^x)^n$

(2) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ (4) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

<u>نشاط ـــ 1</u>

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1 ـــ بين أن f دالة فردية

2 ـــ بين أن من أجل كل x من IR : $f(2x) = \dfrac{2 f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

<u>الحـل ـــ 1</u>

1 ـــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$

و لدينا :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{1 - e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{-(e^x - 1)}{e^x + 1}$$

$= - f(x)$ إذن : الدالة f فردية .

2 ـ ليكن $x \in IR$ إذن : $2x \in IR$

و لدينا :

$$\frac{2 f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{\frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2}$$

$$= \frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1} \times \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{2(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} - 2e^x + 1}$$

$$= \frac{2(e^{2x} - 1)}{2(e^{2x} + 1)}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$= f(2x)$ و هو المطلوب .

نشاط ـ 2

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

بين أن من أجل كل x من IR : $f(-x) + f(x) = 2$ **ثم فسر النتيجة بيانيا .**

الحـل ـ 2

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و لدينا :

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^{-x}(3 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{لأن } e^{-x} \times e^x = e^0 = 1$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2(1 + e^x)}{1 + e^x}$$

$= 2$ و هو المطلوب

التفسر الهندسي : $f(-x) + f(x) = 2 \Rightarrow f(-x) = 2 - f(x)$

$$\Rightarrow f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$$

إذن : النقطة ذات الإحداثيات $(0 ; 1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة :

k عدد حقيقي .

توجد دالة وحيدة f للمتغير الحقيقي x قابلة للاشتقاق على IR و تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} f(0) = 1 & (1) \\ f'(x) = k\, f(x) & (2) \end{cases}$$ و هي معرفة بـ $f(x) = e^{kx}$

نتيجة : الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على IR حيث من أجل كل عددين حقيقيين x ، y :

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$ هي الدوال من الشكل : $x \longmapsto e^{kx}$ حيث $k \in IR$

نتيجة أساسية :

الدالة f المعرفة على IR بـ $x \longmapsto c\,e^{kx}$ حيث $c \in IR$ و $k \in IR$ هي دالة قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f'(x) = c\,k\,e^{kx}$

مثال : الدوال f القابلة للاشتقاق على IR حيث $f'(x) = 2\,f(x)$ هي دوال من الشكل $f(x) = c\,e^{2x}$ حيث $c \in IR$

لأن : $f'(x) = 2\,c\,e^{2x} = 2\,f(x)$

لكن حذار! من بين هذه الدوال توجد دالة وحيدة تحقق الشرط $f(x) = a$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

مثلا : $f(1/2) = e^2$ أي $c\,e^{2(1/2)} = e^2$

أي : $c.e = e^2$

منه : $c = e^2/e = e$

إذن : الدالة المطلوبة هي $f(x) = e.e^{2x} = e^{2x+1}$

تغيرات الدالة exp

الدالة exp معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

الدالة exp قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $\exp'(x) = e^x$

إذن : الدالة exp متزايدة تماما على IR لأن $e^x > 0$

منه : **جدول التغيرات :**

نتائج : منحنى الدالة (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب في جوار $-\infty$

الدالة exp قابلة للاشتقاق عند 0 و $\exp'(0) = e^0 = 1$

لكن تعريفا :

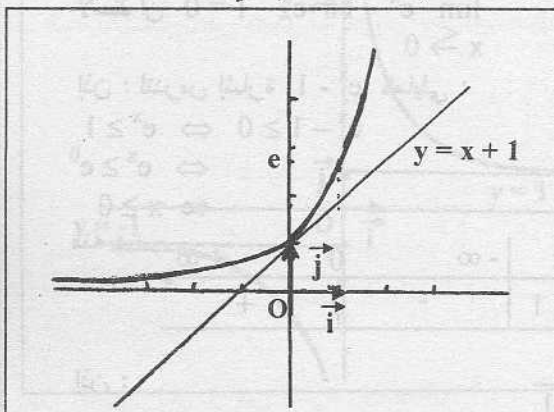
$$\exp'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

إذن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

معادلة مماس منحنى الدالة exp عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = 1(x - 0) + 1$ أي $y = x + 1$

منه : أحسن تقريب تآلفي للدالة exp عند 0 هو الدالة $x \longmapsto x + 1$

منحنى الدالة exp

المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإن من أجل كل عددين حقيقيين x ؛ y لدينا ما يلي :

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ (1)

$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$ (2)

حذار! المعادلة $e^x = y$ حيث $y \leq 0$ لا تقبل حلولا في IR لأن $e^x > 0$

أمثلة :

1 ـ $e^{2x} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = -3$: إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR .

2 ـ $e^{-2x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-2x+1} = e^0$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/2$

3 — $e^{-2x-1} - e^{x} < 0 \Leftrightarrow e^{-2x-1} < e^{x}$

$\Leftrightarrow -2x - 1 < x$

$\Leftrightarrow -3x < 1$

$\Leftrightarrow x > -1/3$

4 — $e^{2x} > 2 - e^{x} \Leftrightarrow e^{2x} + e^{x} - 2 > 0$

لحل هذه المتراجحة نضع $y = e^{x}$ بشرط $y > 0$ لأن $e^{x} > 0$

إذن : المتراجحة تكافئ $y^2 + y - 2 > 0$ و $y = e^{x}$

تكافئ $(y+2)(y-1) > 0$ و $y = e^{x}$

تكافئ $(e^{x}+2)(e^{x}-1) > 0$

تكافئ $e^{x} - 1 > 0$ لأن $e^{x} + 2 > 0$

تكافئ $e^{x} > 1$

تكافئ $e^{x} > e^{0}$

تكافئ $x > 0$

إذن : حلول المتراجحة هي المجال $]0 ; +\infty[$

نشاط :

f دالة معرفة بـ $f(x) = \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و (C) منحناها في معلم .

1 — أدرس تغيرات الدالة f

2 — أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

3 — أنشئ المنحنى (C)

الحـل :

1 — f معرفة من أجل $e^{x} - 1 \neq 0$ أي $e^{x} \neq 1$ أي $e^{x} \neq e^{0}$ أي $x \neq 0$

منه : f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{e^{0}+1}{e^{x}-1} = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{2}{e^{x}-1}$$

لاحظ أن $\lim_{x \underset{<}{\to} 0} e^{x} - 1 = e^{0} - 1 = 0$

إذن : لندرس إشارة $e^{x} - 1$ كمايلي :

$e^{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{x} \geq e^{0}$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

منه :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x} - 1$		$-$	0	$+$	

إذن :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{2}{e^{x}-1} = \lim_{y \underset{<}{\to} 0} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^0+1}{e^x-1}$$
$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y>0}} \frac{2}{y}$$
$$= +\infty$$

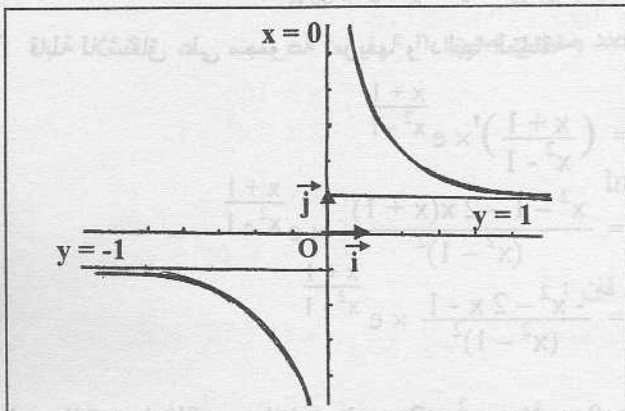
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$
$$= \frac{1+0}{1-0} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{y \to -\infty} e^{y} = 0$$
$$= 1$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{-e^x - e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR^* : $f'(x) < 0$ لأن $-2e^x < 0$ و $(e^x-1)^2 > 0$

منه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

2 ـ المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C)

المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ـ الإنشاء :

دراسة تغيرات الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$

لتكن u دالة معرفة على مجال I جزئي من IR و قابلة للاشتقاق على I نعرف الدالة f بـ $f(x) = e^{u(x)}$

تغيرات الدالة f :

f معرفة على I

النهايات : ليكن $\alpha \in IR \cup \{-\infty ; +\infty\}$

لدينا النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	$B \in IR$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} e^{u(x)}$	e^B	0	$+\infty$

مثال : $\lim\limits_{x \to -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

لأن $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}$

الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $u'(x)$

نشاط :

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$

الحـل :

f معرفة من أجل $x^2 - 1 \neq 0$ أي $x \notin \{-1 ; 1\}$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[U]-1 ; 1[U]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-2}$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-2}$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$

f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)' \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$ نقبل أن α' هو مشتق α .

$$= \frac{x^2 - 1 - 2x(x+1)}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x - 1}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-x^2 - 2x - 1$ لأن $e^{\frac{x+1}{x^2-1}} > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(x^2 + 2x + 1)$ أي $-(x+1)^2$ - كمايلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-(x+1)^2$	-	‖	-

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘ $e^{-1/2}$		‖	$e^{-1/2}$ ↘ 0	‖	$+\infty$ ↘ 1	

II . الدالة اللوغارتمية النيبيرية

تمهيد : الدالة exp متزايدة تماما على IR و تأخذ قيمها على المجال $]0 ; +\infty[$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a يوجد عدد حقيقي وحيد b يحقق $e^b = a$

هذا العدد b يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد الحقيقي الموجب a

و نرمز له بـ $\ln(a)$ إذن : $\begin{cases} e^b = a \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \ln(a)$

مثلا : $b = \ln(3) \Rightarrow e^b = 3$ لأن $3 > 0$

تعريف :

نسمي دالة لوغارتمية نيبيرية الدالة التي نرمز لها بالرمز ln و المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $x \longmapsto \ln x$

نتائج مباشرة :

1 – من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن : $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

2 – من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن : $e^{\ln(x)} = x$

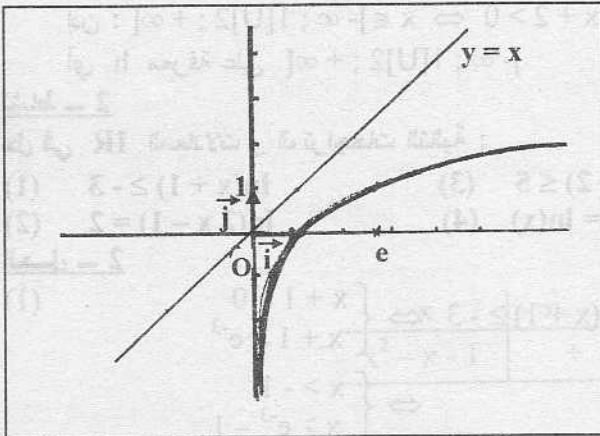
3 – من أجل كل x من IR فإن : $\ln(e^x) = x$

4 – $e^0 = 1$ إذن : $\ln(1) = 0$

5 – $e^1 = e$ إذن : $\ln(e) = 1$

خاصية :

منحنيا الدالتين ln و exp في معلم متعامد و متجانس متناظران بالنسبة إلى المستقيم المنصف الأول ذو المعادلة $y = x$.

منه : منحنى الدالة ln كما يلي :

ملاحظة : تم رسم هذا المنحنى باستعمال الخاصية السابقة أي برسم نظير منحنى الدالة exp بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

نتائج : من المنحنى الممثل لدالة ln نستنتج مايلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad (2)$$

خواص جبرية :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ؛ b ، من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

(1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(2) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ إذن : $\ln(1/a) = -\ln(a)$

(3) $\ln(a^n) = n\ln(a)$ منه $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة ln متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$ (حسب المنحنى) فإن :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y لدينا :

(1) $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

(2) $\ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

نتائج : حسب الخاصية (1) فإن $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x = 1$

حسب الخاصية (2) $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

منه جدول إشارة العدد $\ln(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

نشاط – 1

عين مجموعات تعريف الدوال التالية :

$$f(x) = \ln(x + 1) \quad (1)$$
$$g(x) = \ln(x^2) \quad (2)$$
$$h(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \quad (3)$$

الحـل – 1

1 – f معرفة من أجل $x + 1 > 0$ أي $x > -1$

إذن : f معرفة على $]-1 ; +\infty[$

2 – g معرفة من أجل $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$

إذن : g معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

3 – h معرفة من أجل $x^2 - 3x + 2 > 0$

لندرس إشارة $x^2 - 3x + 2$ كمايلي : $\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

أي h معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

نشاط – 2

حل في IR المعادلات و المتراجحات التالية :

$$\ln(x + 1) \geq -3 \quad (1) \qquad \ln(x + 2) \leq 5 \quad (3)$$
$$\ln(2x - 1) = 2 \quad (2) \qquad \ln(x^2 + 1) = \ln(x) \quad (4)$$

الحـل – 2

(1)

$$\ln(x + 1) \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \geq e^{-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq e^{-3} - 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \geq e^{-3} - 1$ إذن مجموعة الحلول هي المجال $[e^{-3} - 1 ; +\infty[$

(2)

$$\ln(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 = e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ 2x = e^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$ إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا $\{\frac{e^2 + 1}{2}\}$

(3)

$$\ln(x + 2) \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \leq e^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq e^5 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in]-2 ; e^5 - 2]$$

(4) دائما محقق

$$\ln(x^2+1)=\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \\ x^2+1=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-x+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) في المجال $]0\,;+\infty[$

$\Delta = 1-4<0$ إذن المعادلة لا تقبل حلولا .

نتيجة : المعادلة $\ln(x^2+1)=\ln x$ لا تقبل حلولا في IR .

نشاط ــ 3

حل في IR المتراجحة $\ln(x^2-1)\le\ln(x)$

الحــل ــ 3

$$\ln(x^2-1)\le\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \\ x^2-1\le x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\\ x\in]0\,;+\infty[\\ x^2-1-x\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]1\,;+\infty[\quad (1) \\ x^2-1-x\le 0 \quad (2) \end{cases}$$

لندرس إشارة كثير الحدود : x^2-x-1

$$\Delta = 1+4=5$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt5}{2} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt5}{2} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt5}{2}$		$\frac{1+\sqrt5}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		+	0	-	0	+	

إذن : $x^2-1-x\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1-\sqrt5}{2}\,;\frac{1+\sqrt5}{2}\right]$

منه : الشروط (1) و (2) تصبح : $\begin{cases} x\in]1\,;+\infty[\\ x\in\left[\frac{1-\sqrt5}{2}\,;\frac{1+\sqrt5}{2}\right] \end{cases}$

أي : $x\in\left]1\,;\frac{1+\sqrt5}{2}\right]$ و هي حلول المتراجحة المطلوبة .

نشاط ــ 4

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $\ln(x-1)(x+2)=2\ln(2)$

(2) $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln(2)$

(3) $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

الحــل ــ 4

(1)

$$\ln(x-1)(x+2)=2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)>0 \\ \ln(x-1)(x+2)=\ln(2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[\\ (x-1)(x+2)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x^2 + x - 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha) \end{cases}$$

حل المعادلة (α) $\quad x^2 + x - 6 = 0$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

منه :

$$\ln(x-1)(x+2) = 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x \in \{2 ; -3\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{2 ; -3\}$ إذن : المعادلة تقبل حلين هما (-3) و (2)

(2)

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) = 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) = \ln(2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > +1 \\ (x-1)(x+2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1 ; +\infty[\\ x \in \{2 ; -3\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو (2)

(3)

$$2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = \ln(x) \\ 2y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$$

لنحل في IR المعادلة $2y^2 + y - 6 = 0$ كمايلي :

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

إذن :

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ y_2 = \dfrac{-1-7}{4} = -2 \end{cases}$$

منه المعادلة تكافئ

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3/2 = \ln(x) \\ \text{أو} \\ -2 = \ln(x) \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{3/2} \\ \text{أو} \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

إذن : المعادلة تقبل حلين : $\{e^{-2} ; e^{3/2}\}$

النشاط – 5

حل في IR المتراجحة : $\mathbf{\ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln(2)}$

الحل – 5

$$\ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) \leq \ln(4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ (x-1)(x+2) \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x \in [-3 ; 2] \end{cases}$$

$x \in [-3\,;\,-2[\cup]1\,;\,2]$ ⇔ و هي حلول المتراجحة .

دراسة تغيرات الدالة ln

الدالة ln مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بــ $x \longmapsto \frac{1}{x}$

إذن : من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن $\frac{1}{x} > 0$ منه الدالة ln متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		1		e		+∞
(ln(x))'	‖			+			
ln(x)	‖ -∞	↗	0	↗	1	↗	+∞

لاحظ أن قيمة العدد المشتق للدالة ln عند 1 هو $1/1 = 1$

منه : تعريفا $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$ أي $(\ln(1))' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

منه : معادلة مماس منحنى الدالة ln عند النقطة ذات الفاصلة 1 تكتب من الشكل : $y = x - 1$

إذن : أحسن تقريب تآلفي للدالة ln عند 1 هو الدالة $x \longmapsto x - 1$

نشاط – 6

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بــ $f(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x)$ ثم أرسم منحناها

الحـل – 6

f معرفة من أجل $x > 0$ إذن : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} [\ln(x)]^2 - \ln(x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x)\,[\ln(x) - 1] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \times (\ln(x))' \times \ln(x) - (\ln(x))'$$

$$= \frac{2}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}[2\ln(x) - 1]$$

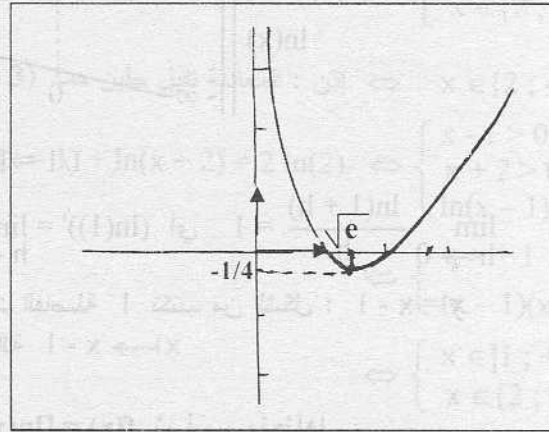
إشارة $f'(x)$ على $]0\,;+\infty[$ هي إشارة الجداء $\frac{1}{x}(2\ln x - 1)$ كمايلي :

$$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq 1/2$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^{1/2})$$
$$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$$

منه : جدول الإشارة التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		+∞
1/x	‖		+		
2 ln x - 1	‖	-	0	+	
f '(x)	‖	-	0	+	

إذن : جدول التغيرات :

$$f(\sqrt{e}) = (\ln\sqrt{e})^2 - \ln(\sqrt{e}) = (1/2)^2 - 1/2 = -1/4$$

الإنشاء :

III. الدالة اللوغاريتم العشري log

تعريف : نسمي دالة لوغاريتم عشري الدالة التي نرمز لها بـــ log و المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بــ $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

خواص الدالة log

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ؛ b و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

(1) $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$

(2) $\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$

(3) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$

(4) $\log(a^n) = n\log(a)$ إذن $\log(10^n) = n\log(10) = n$

نتيجة هامة :

إذا كان x عدد حقيقي يحقق $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log(x) \le n+1$ لأن الدالة log متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$

نشاط ــ 7

حل في IR_+^* المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) $\log(x) = 2$

(2) $\log(x) \le -4$

(3) $\log(x) > 3$

الحــل ــ 7

في كل المعادلات و المتراجحات $x > 0$ لأن الدالة log معرفة على $]0 ; +\infty[$

(1) $\log(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} = 2$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln 100$

$\Leftrightarrow x = 100$

ــ 2 $\log(x) \le -4 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} + 4 \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x) + 4\ln(10)}{\ln(10)} \le 0$$

$\ln 10 > 0$ لأن $\Leftrightarrow \ln(x) + \ln(10^4) \le 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) \le -\ln 10^4$

$\Leftrightarrow \ln(x) \le \ln(10^{-4})$

$\Leftrightarrow 0 < x \le 10^{-4}$

(3) $\log(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} > 3$

$\Leftrightarrow \ln(x) > 3\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(10^3)$

$\Leftrightarrow x > 10^3$

دراسة تغيرات الدالة $\ln o\, u$:

u دالة عددية معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I جزئي من IR

نعرف الدالة f كمايلي : $f : x \longmapsto \ln(u(x))$

تغيرات الدالة f :

f معرفة من أجل $u(x) > 0$ مع $x \in I$

إذا كان α عنصر من المجموعة $IR \cup \{-\infty ; +\infty\}$ فإن :

$\lim_{x \to \alpha} u(x)$	0^+	$+\infty$	$B \in]0 ; +\infty[$
$\lim_{x \to \alpha} \ln(u(x))$	$-\infty$	$+\infty$	$\ln(B)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة : $f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$

إذن : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f هي إشارة $u'(x)$ لأن $u(x) > 0$ حسب مجموعة تعريف الدالة f .

مثال : أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

الحـل :

f معرفة من أجل : $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$

لندرس إشارة $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ كما يلي

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1				+			
x^2-1		+	0	-	0	+	
$\frac{x^2+1}{x^2-1}$		+	‖	-	‖	+	

إذن : $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$ من أجل $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ منه $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(1) = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1+1}{y} = +\infty$ منه $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1+1}{y} = +\infty$ منه $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ منه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 1} \ln(y) = \ln(1) = 0$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

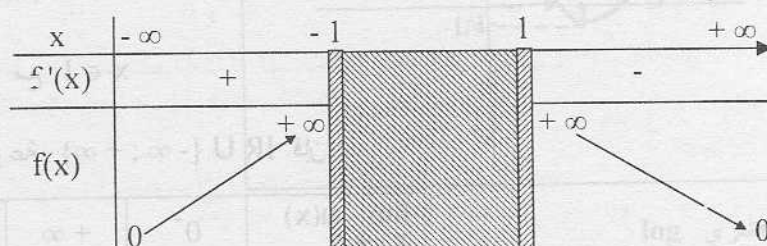
$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \times \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

إذن : $f'(x)$ من إشارة $-4x$ لأن $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

منه : جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			-

منه : جدول تغيرات الدالة f :

نشاط ــ 8

f دالة معرفة على $]-2 ; +\infty[$ بــ $f(x) = \ln(x+2)$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس.
عين فاصلة النقطة التي يكون فيها مماس المنحنى (C) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الحــل ــ 8

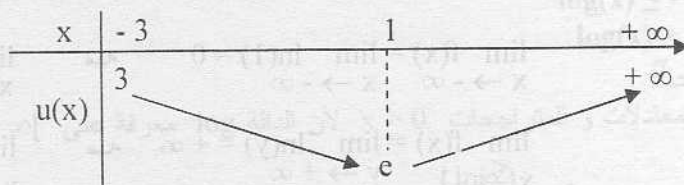
f قابلة للاشتقاق على $]-2 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

يكون المماس عند النقطة ذات الفاصلة x يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ إذا و فقط إذا كان معامل توجيهه 1 أي $f'(x) = 1$

أي $\frac{1}{x+2} = 1$ أي $x + 2 = 1$

منه : $x = -1$ أي نقطة التماس لها الإحداثيات $(-1 ; f(-1))$ أي $(-1 ; 0)$

نشاط ــ 9

إليك جدول تغيرات دالة u على المجال $]-3 ; +\infty[$

المطلوب: إستنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $]-3 ; +\infty[$ بــ $f(x) = \ln(u(x))$

الحــل ــ 9

لاحظ أن من أجل كل x من $]-3 ; +\infty[$ فإن $u(x) > 0$ إذن : f معرفة على $]-3 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} u(x) = 3$ إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = \ln 3$

$u(1) = e$ إذن : $f(1) = \ln(e) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$

إشارة $f'(x)$ على $]-3\,;+\infty[$ هي إشارة $u'(x)$ أي f لها نفس إتجاه تغير الدالة u على المجال $]-3\,;+\infty[$ كمايلي :

x	-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\ln 3$	↘	1	↗	$+\infty$

دراسة الدالة $x \longmapsto e^{-\lambda x}$ **: حيث** $\lambda > 0$

ليكن $\lambda > 0$ نعرف الدالة f على IR بــ $f(x) = e^{-\lambda x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} -\lambda x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ إذن $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0

دراسة الدالة $x \longmapsto e^{-\lambda x^2}$ **: حيث** $\lambda > 0$

ليكن $\lambda > 0$ نعرف الدالة f على IR بــ $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ نسمي (Γ_λ) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} -\lambda x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x^2 = -\infty$

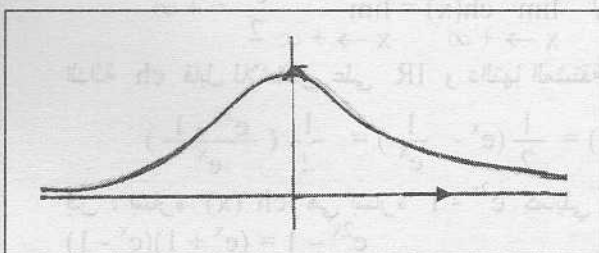
f قابلة للاشتقاق على IR و $f'(x) = -2\lambda x\, e^{-\lambda x^2}$ إذن $f'(x)$ من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

ملاحظة : المنحنيات (Γ_λ) تسمى منحنيات Gauss و هي على شكل ناقوس . تستعمل خاصة في الإحتمالات و الإحصاء و الأكثر إستعمالا هو $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

الإنشاء :

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = a\,y + b$

البحث عن حلول المعادلة التفاضلية $y' = a\,y + b$ ذات المجهول y هو البحث عن الدوال العددية من الشكل $y = f(x)$ و التي تحقق الشروط التالية :

(1) f قابلة للاشتقاق

$f'(x) = a f(x) + b$ (2)

ملاحظة : a و b عددان حقيقيان .

غالبا المعادلة $y' = a y + b$ تكتب من الشكل $\frac{dy}{dx} = a y + b$

مبرهنة :

b ؛ a عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = a y + b$ في المجموعة IR هي الدوال f من الشكل

$f(x) = c e^{ax} - b/a$ حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال : حل في IR المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 3$

الحــل : $y' - 2y = 3 \Leftrightarrow y' = 2y + 3$

إذن : الحلول هي الدوال f حيث : $f : x \longmapsto c e^{2x} - \frac{3}{2}$ $(b = 3 ; a = 2)$

تحقيق : ليكن $f(x) = c e^{2x} - \frac{3}{2}$

إذن : $f'(x) = 2 c e^{2x}$

منه : $f'(x) - 2 f(x) = 2 c e^{2x} - 2\left(c e^{2x} - \frac{3}{2}\right)$

$= 2 c e^{2x} - 2 c e^{2x} + 3$

$= 3$ إذن فعلا الدالة f هي حل للمعادلة $y' - 2y = 3$

حالة خاصة : $b = 0$

حلول المعادلة $y' = a y$ هي الدوال f حيث $f(x) = c e^{ax}$ حيث c عدد حقيقي ثابت .

الدالتان تجب و جيب الزائديتان

نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على IR على الترتيب ch و sh و المعرفتين كمايلي :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

<u>نشاط ــ 9</u>

1 ــ أثبت أن الدالة ch زوجية .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة ch على المجال $[0 ; +\infty[$

3 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة ch على IR

4 ــ أثبت أن الدالة sh فردية .

5 ــ أدرس تغيرات الدالة sh على المجال $[0 ; +\infty[$

6 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة sh على IR

ليكن (C_1) منحنى الدالة ch في معلم متعامد و متجانس و (C_2) منحنى الدالة sh في نفس المعلم

7 ــ أدرس الأوضاع النسبية لــ (C_1) و (C_2)

8 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} [ch(x) - sh(x)]$ فسر النهاية هندسيا .

<u>الحــل ــ 9</u>

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$

إذن : $ch(-x) = ch(x)$ منه الدالة ch زوجية .

2 ــ التغيرات على المجال $[0 ; +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} ch(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

الدالة ch قابل للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$ch'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} + e^{x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$

إذن : إشارة $ch'(x)$ هي إشارة $e^{2x} - 1$ كمايلي :

$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x + 1$		+	
$e^x - 1$	-	0	+
$(e^x + 1)(e^x - 1)$	-	0	+

3 ـ منه جدول تغيرات الدالة ch على IR : الدالة زوجية إذن : نستنتج الجزء على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ (بالتناظر)

4 ـ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2}$

إذن : $sh(-x) = -sh(x)$ منه الدالة sh فردية .

5 ـ تغيرات الدالة sh على $]0\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} sh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

الدالة sh قابل للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة هي :

$$sh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = ch(x)$$

و حسب السؤال (3) فإن $ch(x) > 0$ من أجل كل x من IR .

إذن جدول تغيرات الدالة sh كمايلي :

6 ـ الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2) :

$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= e^{-x} > 0$$

إذن : المنحنى (C_1) يقع دائما فوق المنحنى (C_2)

7 ـ $\lim_{x \to +\infty} [ch(x) - sh(x)] = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

التفسير الهندسي : لما x يؤول الى $+\infty$ فإن المنحنيان (C_1) و (C_2) متجاوران نقول أنهما متقاربان .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين – 1

بسط العبارات التالية :

(1) $(e^x)^3 \times e^{-5x}$ (2) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$ (3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

الحـل – 1

(1) $$(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$$

(2) $$\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} = e^{2x+3+2x} = e^{4x+3}$$

(3) $$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$$

التمرين – 2

بين صحة كل من المساواة التالية :

(1) $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (2) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

(3) $(e^x + e^{-x})^2 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}}$ (4) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

الحـل – 2

(1) $$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{-2x}(e^{2x}-1)}{e^{-2x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$ لأن $e^{-2x}\, e^{2x} = e^0 = 1$

(2) $$e^{-x} - e^{-2x} = e^{-2x}(e^x - 1) = \frac{1}{e^{2x}}(e^x - 1) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

(3) $$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2\, e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{-2x}(e^{4x} + 2\, e^{2x} + 1)$$
$$= \frac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}}$$

(4) $$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

التمرين – 3

$(u_n)_{n\in IN}$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \dfrac{e^{n-1}}{e^n}$

بين أن (u_n) متتالية ثابتة .

الحـل – 3

ليكن $n \in IN$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e^{n+1-1}}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$
$$= \frac{e^n}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$
$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e}$$
$= 0$ إذن : (u_n) ثابتة

ملاحظة : يمكن إثبات ذلك مباشرة من عبارة u_n كمايلي :

من أجل كل n من IN لدينا : $u_n = \dfrac{e^{n-1}}{e^n} = \dfrac{1}{e}$ إذن : (u_n) ثابتة .

التمرين – 4

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $e^{2x} = 1$

(2) $e^{-5x} = e$

(3) $e^{x} = e^{-2x}$

الحـل – 4

(1) $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{0}$
$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

(2) $e^{-5x} = e \Leftrightarrow e^{-5x} = e^{1}$
$\Leftrightarrow -5x = 1$
$\Leftrightarrow x = -1/5$

(3) $e^{x} = e^{-2x} \Leftrightarrow x = -2x$
$\Leftrightarrow x = 0$

التمرين – 5

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $e^{-x^2} = 1/e$ (3) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ (5) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$

(2) $e^{x+3} = e^{4/x}$ (4) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x}$

الحـل – 5

(1) $e^{-x^2} = 1/e \Leftrightarrow e^{-x^2} = e^{-1}$
$\Leftrightarrow -x^2 = -1$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$

(2) $e^{x+3} = e^{4/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 3 = \frac{4}{x} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x+4)(x-1) = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x \in \{1 ; -4\}$

(3) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \Leftrightarrow x^2 = -3(x+1)$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$

نحل المعادلة $x^2 + 3x + 3 = 0$ كمايلي : $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ إذن لا تقبل حلول في R

نتيجة : المعادلة $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ لا تقبل حلول في R .

(4) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \neq 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 0 \\ x^2 + 4x = 6 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0 ; 6\} \\ (x + 6)(x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0 ; 6\} \\ x \in \{1 ; -6\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{1 ; -6\}$$

(5) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{3x}$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3x$
$\Leftrightarrow x = 1$

<u>التمرين ـــ 6</u>

حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $e^{3x} \leq 1$	(5) $e^{x+1} > e^{-2/x}$
(2) $e^x > e^2$	(6) $e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x}$
(3) $e^x < e^{-2x}$	(7) $e^{x-x^2} \geq 1$
(4) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$	(8) $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$

<u>الحــل ـــ 6</u>

(1) $e^{3x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^0$
$\Leftrightarrow 3x \leq 0$
$\Leftrightarrow x \leq 0$ إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]-\infty ; 0]$

(2) $e^x > e^2 \Leftrightarrow x > 2$ إذن : مجموعة الحلول هي $]2 ; +\infty[$

(3) $e^x < e^{-2x} \Leftrightarrow x < -2x$
$\Leftrightarrow 3x < 0$
$\Leftrightarrow x < 0$ إذن : مجموعة الحلول هي $]-\infty ; 0[$

(4) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \Leftrightarrow 2x^2 \leq 5x + 3$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $2x^2 - 5x - 3$ كمايلي :

$\Delta = 25 + 24 = 49$

منه $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 + 7}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5 - 7}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		-1/2		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		+	0	-	0	+	

إذن حلول المتراجحة $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$ هي $[-1/2 ; 3]$

(5) $e^{x+1} > e^{-2/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 > -2/x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 + 2/x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 2}{x} > 0 \end{cases}$$

لندرس إشارة الجداء $x(x^2 + x + 2)$ كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	‖	+
$x^2 + x + 2$	+	‖	+
$\dfrac{x^2 + x + 2}{x}$	-	‖	+

منه حلول المتراجحة هي المجال : $]0\,;+\infty[$

(6) $e^{x^2} > (e^3)^4\, e^{-x} \Leftrightarrow e^{x^2} > e^{12-x}$

$\Leftrightarrow x^2 > 12 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 > 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-4[\cup]3\,;+\infty[$ و هي مجموعة الحلول .

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$(x+4)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(7) $e^{x-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-x^2} \geq e^0$

$\Leftrightarrow x - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x(1-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in [0\,;1]$ و هي مجموعة الحلول

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(8) $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$

لندرس إشارة كل من $(e^x - 1)$ ثم $(e^x - e^2)$ كمايلي :

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0$

إذن : $\Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	

$e^x - e^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^2$

إذن : $\Leftrightarrow x \geq 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^x - e^2$		$-$	0	$+$	

خلاصة : إشارة الجداء $(e^x - 1)(e^x - e^2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$			
$e^x - e^2$				$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)(e^x - e^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

أخيرا : حلول المتراجحة $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$ هي المجال $]0\,;2[$

<u>التمرين ـ 7</u>

في كل من الحالات التالية عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على IR و التي تحقق الشروط المطلوبة :

(1) $f' = 3f$ و $f(0) = 1$

(2) $f' = -f$ و $f(0) = 1$

(3) $f' = \frac{1}{2} f$ و $f(0) = 1$

<u>الحـــل ـ 7</u>

(1) $\begin{cases} f' = 3f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{3x}$

(2) $\begin{cases} f' = -f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{-x}$

(3) $\begin{cases} f' = \frac{1}{2} f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{2}x}$

<u>التمرين ـ 8</u>

f دالة قابلة للاشتقاق على IR حيث $f' = kf$ و $f(0) = \lambda$ مع λ و k عددان حقيقيان حيث $\lambda \neq 0$

لتكن g دالة معرفة على IR بـ $g = \frac{1}{\lambda} f$

1 ـ تحقق أن $g' = kg$ و $g(0) = 1$

2 ـ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x فان $f(x) = \lambda e^{kx}$

الحـل ـ 8

1 ـ لدينا من أجل كل x من IR : $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

إذن : من أجل كل x من IR : $g'(x) = \frac{1}{\lambda} f'(x)$

لكن $f'(x) = k f(x)$ إذن : $g'(x) = \frac{1}{\lambda} (k f(x))$

أي : $g'(x) = k \times \frac{1}{\lambda} f(x)$ منه $g'(x) = k\, g(x)$

أي : $g' = k \cdot g$ و هو المطلوب .

لدينا : $g(0) = \frac{1}{\lambda} f(0)$ أي $g(0) = \frac{1}{\lambda} (\lambda)$ أي $g(0) = 1$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن $\begin{cases} g' = k\, g \\ g(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $g : x \longmapsto e^{kx}$

من جهة أخرى لدينا : $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ إذن : $\lambda\, g(x) = f(x)$

أي : $f(x) = \lambda\, g(x)$

أي : $f(x) = \lambda\, e^{kx}$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 9

في كل من الحالات التالية عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على IR حيث :

(1) $f' = -6 f$ و $f(0) = -1$

(2) $f' = -2 f$ و $f(0) = 1/2$

(3) $f' = \sqrt{2} f$ و $f(0) = 2$

الحـل ـ 9

(1) $\begin{cases} f' = -6 f \\ f(0) = -1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto -e^{-6x}$

(2) $\begin{cases} f' = -2 f \\ f(0) = 1/2 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto \frac{1}{2} e^{-2x}$

(3) $\begin{cases} f' = \sqrt{2} f \\ f(0) = 2 \end{cases}$ إذن : $: x \longmapsto 2 e^{\sqrt{2}x}$

التمرين ـ 10

f دالة معرفة على IR و غير معدومة حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x + y) = f(x) \times f(y)$

1 ـ بين أن $f(0) = 1$

2 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \times f(-x) = 1$

3 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$

4 ـ إستنتج إشارة $f(x)$ على IR

الحـل ـ 10

1 ـ من أجل $y = 0$ نحصل على : من أجل كل x من IR : $f(x + 0) = f(x) \times f(0)$

أي : $f(x) = f(x) \times f(0)$

أي : $f(0) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$ لأن $f(x) \neq 0$

2 ـ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

2 ـ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$f(x - x) = f(0) \Leftrightarrow f(x - x) = 1$

$\Leftrightarrow f(x + (-x)) = 1$

$\Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$ لأن $f(x + (-x)) = f(x) \times f(-x)$ و هو المطلوب .

3 ــ من أجل كل x من IR فإن :
$$f(x/2) \times f(x/2) = f(x/2 + x/2) \Leftrightarrow f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$$

4 ــ لدينا من أجل كل x من IR $f(x) = f(x/2) \times f(x/2) = [f(x/2)]^2$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) \geq 0$

لكن : f غير معدومة إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) > 0$

التمرين ــ 11

f دالة معرفة و موجبة على IR حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x + y) = f(x) \times f(y)$

1 ــ عين $f(2x)$ ؛ $f(3x)$ ؛ $f(4x)$ بدلالة $f(x)$

2 ــ إستنتج عبارة $f(nx)$ بدلالة $f(x)$ من أجل $n \in IN^*$

نضع $f(1) = k$ حيث $k > 0$

3 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن : $f(n) = k^n$ و $[f(1/n)]^n = k$

4 ــ إستنتج $f(1/2)$ و $f(1/4)$ بدلالة k .

الحــل ــ 11

ــ 1
$$f(2x) = f(x + x) = f(x) \times f(x) = [f(x)]^2$$
$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) \times f(2x) = f(x) \times [f(x)]^2 = [f(x)]^3$$
$$f(4x) = f(2x + 2x) = f(2x) \times f(2x) = [f(2x)]^2 = [f(x)]^4$$

2 ــ يمكن تعميم نتيجة السؤال الأول كمايلي :

من أجل كل n من IN^* : $f(nx) = [f(x)]^n$

ملاحظة : يمكن البرهان عن صحة هذه النتيجة بالبرهان بالتراجع (غير مطلوب)

3 ــ $f(1) = k$ إذن : $f(n \times 1) = [f(1)]^n = k^n$ (من أجل $x = 1$) .

أي : $f(n) = k^n$

أيضا : $f(n \times 1/n) = f(1) \Leftrightarrow f(n \times 1/n) = k$

$\Leftrightarrow [f(1/n)]^n = k$ لأن $f(n \times 1/n) = [f(1/n)]^n$ من أجل $x = 1/n$

4 ــ لدينا : $[f(1/2)]^2 = k \Rightarrow \begin{cases} f(1/2) = \sqrt{k} \\ \text{أو} \\ f(1/2) = -\sqrt{k} \end{cases}$

لكن الدالة f موجبة إذن : $f(1/2) = \sqrt{k}$

$[f(1/4)]^4 = k \Rightarrow [f(1/4)]^2 = \sqrt{k}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1/4) = +\sqrt{\sqrt{k}} \\ \text{أو} \\ f(1/4) = -\sqrt{\sqrt{k}} \end{cases}$

لكن الدالة f موجبة إذن : $f(1/4) = \sqrt{\sqrt{k}}$

التمرين ــ 12

أحسب نهايات الدوال التالية عند $-\infty$ و $+\infty$

1 ــ $f(x) = e^{-x}$ 　　 **4 ــ $f(x) = x + e^{2x}$**

2 ــ $f(x) = 2e^{2x}$ 　　 **5 ــ $f(x) = 1 + e^x + e^{2x}$**

3 ــ $f(x) = e^x + e^{-x}$

الحــل ــ 12

الدالة f	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$
$f(x) = e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$)	0 (لأن $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$)
$f(x) = 2e^{2x}$	0 (لأن $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$)	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$)
$f(x) = e^{x} + e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$)	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$)
$f(x) = x + e^{2x}$	$-\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$)	$+\infty$
$f(x) = 1 + e^{x} + e^{2x}$	1	$+\infty$

التمرين ــ 13

f دالة معرفة على **IR** بــ $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2 ــ تحقق أن : $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$ **ثم إستنتج** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحــل ــ 13

1 ــ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{x} = 0$

لأن : $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

2 ــ لدينا : $e^{2x}(1 - e^{-x}) = e^{2x} - e^{2x-x}$

$= e^{2x} - e^{x}$

$= f(x)$ و هو المطلوب .

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - e^{-x})$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$= +\infty$

التمرين ــ 14

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1}$ **عند** $-\infty$ **و** $+\infty$

2 ــ $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2x}$ **عند** 0

3 ــ $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{3x} - 1)$ **عند** 0

4 ــ $f(x) = x(e^{1/x} - 1)$ **عند** $-\infty$ **و** $+\infty$ **(يمكنك وضع** $X = 1/x$**)**

الحــل ــ 14

1 ــ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = -1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}(1 - e^{-x})}{e^{x}(2 + e^{-x})}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{2 + e^{-x}}$$

$= 1/2$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

2 ـ لحساب $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ نعتبر الدالة $g: x \longmapsto e^x$

لدينا g قابلة للاشتقاق على IR و خاصة عند 0 و دالتها المشتقة $g'(x) = e^x$

إذن : $g'(0) = e^0 = 1$

لكن حسب التعريف :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

إذن : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

منه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

3 ـ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

نضع : $g(x) = e^{3x}$ إذن : $g'(x) = 3e^{3x}$ منه : $g'(0) = 3e^0 = 3$ و $g(0) = 1$

لكن حسب التعريف :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

منه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$

4 ـ لحساب $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1)$ نضع $X = 1/x$ منه : $x = 1/X$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} X = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} X = 0$

منه : $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{X \to 0} \frac{1}{X}(e^X - 1)$

$= 1$ حسب السؤال (2).

التمرين ـ 15

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x}$

1 ـ أكتب f(x) من الشكل $f(x) = e^x g(x)$ حيث g دالة للمتغير x .

2 ـ إستنتج $\lim_{x \to 0} f(x)$

الحـل ـ 15

1 ـ $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x} = e^x\left(\frac{1 - e^x}{x}\right)$ إذن : $g(x) = \frac{1 - e^x}{x}$

2 ـ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x\left(\frac{1 - e^x}{x}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} - e^x\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ لأن $= -1$

التمرين – 16

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = e^{1/x}$

أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحل – 16

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{1/x} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} e^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

التمرين – 17

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

1 – أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2 – بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$

3 – بين أن الدالة f فردية .

4 – إستنتج $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

5 – إستنتج أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ - يطلب تعيين معادلته .

الحل – 17

1 –

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0 - \frac{e^0 + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-2}{y} = -\infty$$ لأن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} e^x - 1 = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - 1$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$$= +\infty$$

2 –

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to +\infty} x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - (x - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لأن} \quad = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$

3 ــ من أجل كل x من IR^* فإن $(-x) \in IR^*$ و لدينا :

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$$
$$= -x - \frac{e^{-x}(1+e^x)}{e^{-x}(1-e^x)}$$
$$= -x - \frac{1+e^x}{1-e^x}$$
$$= -x + \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$= -\left(x - \frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$$

إذن الدالة f فردية $= -f(x)$

4 ــ لدينا f فردية
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{إذن :} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$

5 ــ لنثبت أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \to -\infty} x - \frac{e^x+1}{e^x-1} - (x+1)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} -1 - \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to -\infty} -1 - \frac{0+1}{0-1}$$
$$= -1 + 1$$

إذن فعلا المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$ $= 0$

التمرين ــ 18

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = 2x + 1 - e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (D) .

الحــل ــ 18

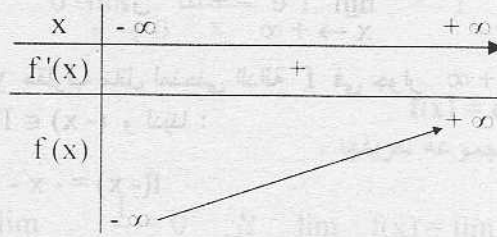
1 ــ التغيرات : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 - (-e^{-x}) = 2 + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل x من R فإن $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ لدينا : $f(x) - (2x+1) = -e^{-x}$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) - (2x+1) < 0$

أي المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D) .

التمرين ــ 19

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = -x + 2 + 3e^{-2x}$ و (C) منحناها في معلم .
بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

الحـل ــ 19

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 + 3e^{-2x} - (-x+2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x}$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

التمرين ــ 20

عين مشتقة الدالة f على المجموعة IR في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = x\,e^{x}$ $\qquad$ (5) $f(x) = (e^{x} - 1)(e^{x} + 2)$

(2) $f(x) = (2x - 3)\,e^{x}$ $\qquad$ (6) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - x}$

(3) $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{x}$ $\qquad$ (7) $f(x) = \dfrac{3e^{x} - 2}{e^{x} + 1}$

(4) $f(x) = (1 + \cos x)e^{x}$

الحـل ــ 20

(1) $f(x) = x\,e^{x} \Rightarrow f'(x) = 1 \times e^{x} + e^{x} \times x = e^{x} + x\,e^{x} = e^{x}(1 + x)$

(2) $f(x) = (2x - 3)e^{x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{x} + (2x - 3)e^{x} = e^{x}(2x - 1)$

(3) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x} \Rightarrow f'(x) = (2x + 1)e^{x} + (x^2 + x + 1)e^{x} = e^{x}(x^2 + 3x + 2)$

(4) $f(x) = (1 + \cos x)e^{x} \Rightarrow f'(x) = -\sin x\,e^{x} + (1 + \cos x)e^{x} = e^{x}(1 + \cos x - \sin x)$

(5) $f(x) = (e^{x} - 1)(e^{x} + 2) \Rightarrow f'(x) = e^{x}(e^{x} + 2) + e^{x}(e^{x} - 1) = e^{x}(e^{x} + 2 + e^{x} - 1) = e^{x}(2e^{x} + 1)$

(6) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x} - x) - (e^{x} - 1)e^{x}}{(e^{x} - x)^2} = \dfrac{e^{x}(e^{x} - x - e^{x} + 1)}{(e^{x} - x)^2} = \dfrac{e^{x}(1 - x)}{(e^{x} - x)^2}$

(7) $f(x) = \dfrac{3e^{x} - 2}{e^{x} + 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3e^{x}(e^{x} + 1) - e^{x}(3e^{x} - 2)}{(e^{x} + 1)^2} = \dfrac{3e^{2x} + 3e^{x} - 3e^{2x} + 2e^{x}}{(e^{x} + 1)^2} = \dfrac{5e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$

التمرين ــ 21

عين مشتقات الدوال التالية على مجموعة تعريفها IR :

(1) $f(x) = e^{2x+3}$ $\qquad$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x/2}}$

(2) $f(x) = (-x - 1)e^{-x}$ $\qquad$ (4) $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$

الحـل ـ 21

(1) $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x+3}$

(2) $f(x) = (-x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1)$

$\Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(1-x-1)$

$\Rightarrow f'(x) = x\,e^{-x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{x/2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{0 - \frac{1}{2}e^{x/2}}{(1+e^{x/2})^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-e^{x/2}}{2(1+e^{x/2})^2}$

(4) $f(x) = (x^2-1)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x\,e^{2x} + 2e^{2x}(x^2-1)$

$= 2e^{2x}(x + x^2 - 1)$

$= 2e^{2x}(x^2 + x - 1)$

التمرين ـ 22

عين مشتقة الدالة f على IR - {1} حيث $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

الحـل ـ 22

$$f'(x) = \left(\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

التمرين ـ 23

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x + 1 + e^x$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ـ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ فسر هندسيا النتيجة .

3 ـ أرسم في معلم متعامد و متجانس منحنى الدالة f.

الحـل ـ 23

1 ـ التغيرات :

f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 1 + e^x$$

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + e^x = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 1 + e^x$

إذن : من أجل كل x من IR : $f'(x) > 0$

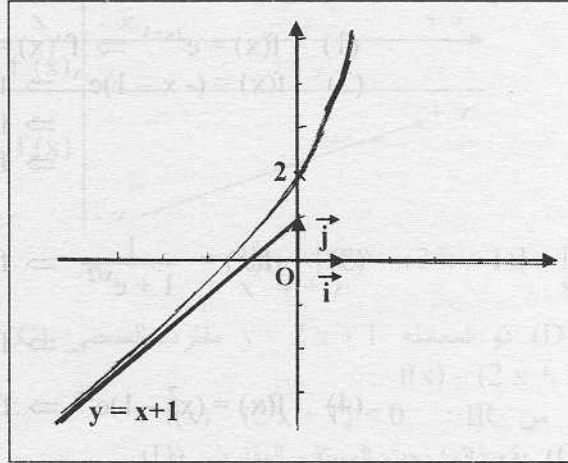
منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\nearrow$ $+\infty$

2 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 + e^x - (x+1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

$= 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$

3 ــ الإنشاء :

التمرين ــ 24

f دالة معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ بــ $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

2 ــ بين أن المنحنى (C) للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ يطلب معادلته .

3 ــ أدرس الوضعية النسبية لــ (C) و (D) ثم أنشئ كل منهما .

الحــل ــ 24

1 ــ التغيرات : $f(0) = 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} = +\infty$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - (-e^{-x}) = \frac{1}{2} + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه : جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
f '(x)	+	
f (x)	0 ↗	$+\infty$

2 ــ لدينا : $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -e^{-x}$$

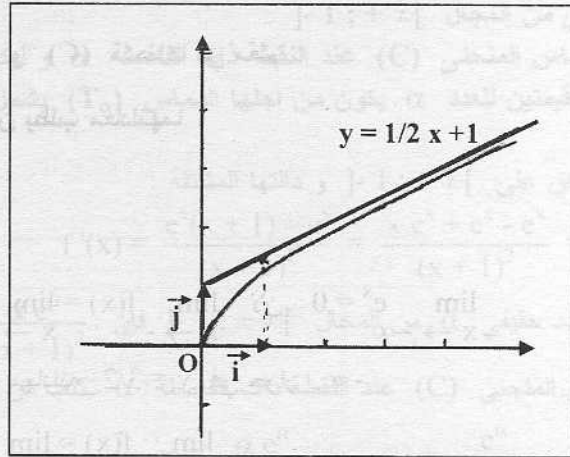
$= 0$ إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ $$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -e^{-x} < 0$$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) < 0$

أي : المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D).

الإنشاء :

التمرين ـــ 25

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـــ أنشئ المنحنى (C) .

الحـل ـــ 25

1 ـــ التغيرات : f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{4x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{4x}(1 - 3e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 3e^{-4x}}{1 + e^{-4x}} = 1$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-4x} = 0$

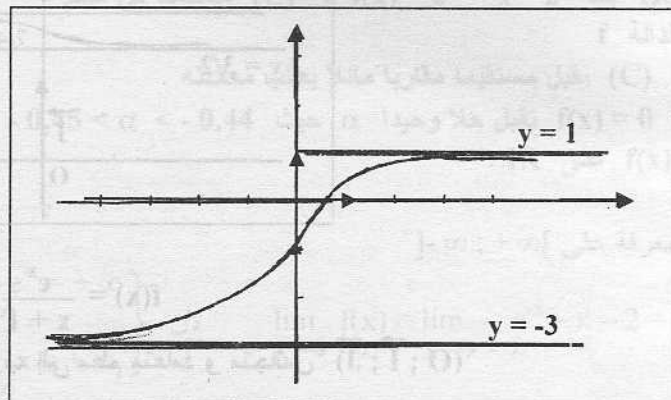
f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{4e^{4x}(e^{4x} + 1) - 4e^{4x}(e^{4x} - 3)}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-3 ↗	-1	↗ 1

2 ـــ الإنشاء :

التمرين ـــ 26

f دالة معرفة على R بـ $f(x) = \dfrac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ـــ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتهما .

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ـــ أرسم بعناية المنحنى (C) .

الحـــل ـــ 26

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)} = \frac{4(0) + 3}{2(0 + 1)} = \frac{3}{2}$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

إذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 3/2$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(4 + 3e^{-x})}{2e^x(1 + e^{-x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + 3e^{-x}}{2(1 + e^{-x})}$$

$$= \frac{4 + 3(0)}{2(1 + 0)}$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$$= 2$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

2 ـــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3/2$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{4e^x \cdot 2(e^x + 1) - 2e^x(4e^x + 3)}{[2(e^x + 1)]^2}$$

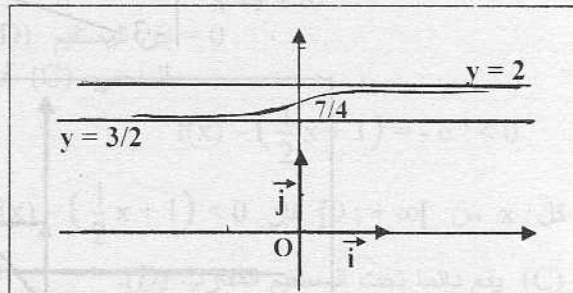
$$= \frac{8e^{2x} + 8e^x - 8e^{2x} - 6e^x}{4(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{+2e^x}{4(e^x + 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$ لأن $\dfrac{2e^x}{4(e^x + 1)^2} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)		+	
f (x)	3/2	↗ 7/4 ↗	2

7 ـــ الإنشاء :

التمرين ـــ 27

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

ليكن α عدد حقيقي من المجال $]-1 ; +\infty[$

1 – أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α و ليكن (T_α) هذا المماس .

2 – أثبت أنه توجد قيمتين للعدد α يكون من أجلها المماس (T_α) يشمل مبدأ المعلم .

__الحـل – 27__

1 – f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x + e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $]-1 ; +\infty[$ فإن : $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2}$

نتيجة : معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α تكتب من الشكل : $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

أي : $y = \dfrac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha) + \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1}$

أي : $y = \dfrac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2}x - \dfrac{\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1}$ و هي معادلة (T_α)

2 – يكون (T_α) يمر بالمبدأ إذا و فقط إذا تحقق مايلي :

$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{-\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1} = 0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1}\left(\dfrac{-\alpha^2}{\alpha+1} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

أي $$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{-\alpha^2}{\alpha+1} + 1 = 0 \end{cases}$$

أي $$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ -\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

أي $$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \alpha \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2}\right\} \end{cases}$$

أي $$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \alpha \in \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{cases}$$

أي $\alpha \in \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

إذن : يوجد مماسين عند النقطة ذات الفاصلة α يشملان المبدأ و هما من أجل $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

__التمرين – 28__

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-x} - x - 2$ و (C) منحناها في معلم

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .

3 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,45 < \alpha < -0,44$

4 – إستنتج إشارة $f(x)$ على IR .

__الحـل – 28__

1 – التغيرات : f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$

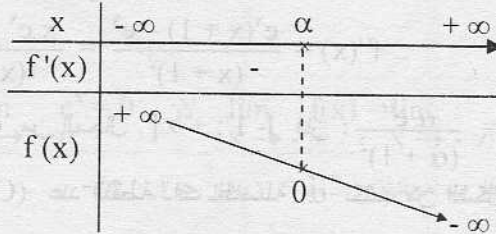
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - x - 2 = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} - x - 2 = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) < 0$ لأن $(e^{-x} + 1) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

2 ـ لدينا : $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ـ $f(-0,45) = e^{0,45} + 0,45 - 2 = 1,56 + 0,45 - 2 = 0,01$

$f(-0,44) = e^{0,44} + 0,44 - 2 = 1,55 + 0,44 - 2 = -0,01$

نتيجة : f مستمرة على $[-0,45 ; -0,44]$ و $f(-0,45) \times f(-0,44) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α من المجال $]-0,45 ; -0,44[$

بما أن f متناقصة تماما على IR فإن هذا الحل وحيد على R.

4 ـ لدينا $f(\alpha) = 0$ مع $-0,45 < \alpha < -0,44$ منه حسب جدول تغيرات الدالة f

نستنتج إشارة f(x) كمايلي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)		+	0	-	

التمرين ـ 29

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ـ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلاتهما .

3 ـ أثبت أن النقطة $A(0 ; 1/2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

4 ـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

لتكن g الدالة المعرفة على IR كمايلي : $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$

5 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$

6 ـ شكل جدول تغيرات الدالة g . ثم إستنتج إشارة g(x) على IR .

7 ـ إستنتج الوضعية النسبية للمماس (C) بالنسبة إلى المنحنى (C).

8 ـ أرسم بعناية المنحنى (C) .

الحـل ـ 29

1 ـ تغيرات الدالة f :

f معرفة على IR

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{0 + 1} = 1$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x.e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR : $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0 ↗	1/2	↗ 1

2 ــ المستقيمات المقاربة :

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ من أجل كل x من IR فإن : $(-x) \in IR$ أي $[2(0) - x] \in IR$

و
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$$

من جهة أخرى
$$2(1/2) - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

نتيجة : من أجل كل x من IR : $f(2(0) - x) = 2(1/2) - f(x)$

إذن : النقطة $A(0\,;\,1/2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4 ــ معادلة المماس عند النقطة $A(0\,;\,1/2)$ تكتب من الشكل :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\begin{cases} f(0) = 1/2 \\ f'(0) = \dfrac{1}{(2)^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

منه : معادلة المماس (T) هي : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

5 ــ g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1 - 2e^x + e^{2x}}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$$ و هو المطلوب .

6 ــ لاحظ أن $g'(x)$ من إشارة $(e^x - 1)^2$ لأن المقام موجب كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(e^x-1)^2$		+	0	+	

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = -\infty$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 1 = +\infty$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

منه : جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	+	0	+
g(x)	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$$g(0) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2} - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة g(x) كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	-	0	+

7 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (T) :

لدينا : $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = g(x)$

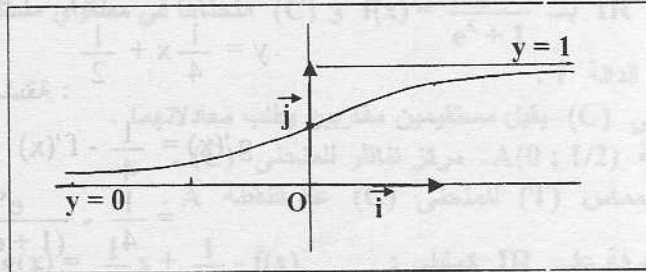
إذن : إشارة $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$ هي إشارة g(x) كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$	-	0	+

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 0[$: المماس (T) يقع تحت المنحنى (C).

لما $x = 0$: المماس (T) يقطع المنحنى (C) (مماس له)

لما $x \in]0 ; +\infty[$: المماس (T) يقع فوق المنحنى (C) .

8 ــ الإنشاء :

التمرين - 30

f و g دالتان معرفتان على المجال $[0 ; \pi]$ بـ : $f(x) = e^{-x} \sin x$ ؛ $g(x) = e^{-x}$

نسمي (C_1) و (C_2) على الترتيب منحنيا الدالتين f و g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 - أثبت أن (C_1) و (C_2) يتقاطعان في نقطة A يطلب إحداثياها .

2 - أثبت أن (C_1) و (C_2) لهما نفس المماس عند النقطة A .

الحل - 30

- 1

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}\sin x = e^{-x} \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi/2$$

نتيجة : (C_1) و (C_2) يشتركان في نقطة واحدة A إحداثياها $A(\pi/2 ; f(\pi/2))$ أي : $A(\pi/2 ; e^{-\pi/2})$

2 ـ معادلة مماس المنحنى (C_1) عند النقطة A :

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$
$$= e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

إذن : $f'(\pi/2) = e^{-\pi/2}(0-1) = -e^{-\pi/2}$

منه : معادلة المماس هي : $y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$ ....(1)

معادلة مماس المنحنى (C_2) عند النقطة A :

$$g'(x) = -e^{-x}$$

إذن $g'(\pi/2) = -e^{-\pi/2}$

منه : معادلة المماس هي : $y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$ ....(2)

خلاصة : بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنيين (C_1) و (C_2) لهما نفس المماس عند النقطة A و معادلته

$$y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$$

التمرين ـ 31

هل الدالتان المعرفتان على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$

و $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ متساويتان ؟

الحل ـ 31

لدينا f معرفة على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

و من جهة أخرى : g معرفة على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$

فإن $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

نتيجة : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $g(x) = f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

أي فعلا الدالتان g و f متساويتان على المجال $]0 ; +\infty[$ فقط

حذار ! الدالة f معرفة من أجل $\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ أي $x \in]0 ; +\infty[$

الدالة g معرفة من أجل $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[\end{cases}$

أي $x \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

أي g معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

التمرين ـ 32

ليكن p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

1 ـ تحقق أن $p(x) = (2x-1)(x+2)(3-x)$

2 ـ حل في IR المعادلة $p(x) = 0$

3 ـ إستنتج مجموعة حلول المعادلة $-2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 11\ln x - 6 = 0$ ثم حلول المعادلة

$$-2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^{x} - 6 = 0$$

الحل ـ 32

1ـ لدينا : $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$

منه $(2x-1)(x+2)(3-x) = (2x^2 + 3x - 2)(3-x)$

$$= 6x^2 - 2x^3 + 9x - 3x^2 - 6 + 2x$$
$$= -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$

$= p(x)$ و هو المطلوب .

2ـ $p(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2)(3-x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 3 - x = 0 \end{cases}$$ أو ... أو

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$ أو ... أو

إذن : مجموعة حلول المعادلة $p(x) = 0$ في IR هي : $\{1/2 ; -2 ; 3\}$

3 –

$$-2[\ln(x)]^3 + 3[\ln(x)]^2 + 11\ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1/2 = \ln x \text{ أو } -2 = \ln x \text{ أو } 3 = \ln x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ ($x = e^{1/2}$ أو $x = e^{-2}$ أو $x = e^3$)

إذن: حلول المعادلة هي المجموعة $\{e^{1/2} ; e^{-2} ; e^3\}$

4 – $-2(e^x)^3 + 3(e^x)^2 + 11(e^x) - 6 = 0 \Leftrightarrow -2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha \in \{1/2 ; 3\} \end{cases}$$ لأن $\alpha > 0$

$\Leftrightarrow$ ($1/2 = e^x$ أو $3 = e^x$)

$\Leftrightarrow$ ($x = \ln(1/2)$ أو $x = \ln 3$)

إذن: حلول المعادلة هي المجموعة $\{\ln(1/2) ; \ln(3)\}$

التمرين – 33

أكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية :

(1) $\ln 14 - \ln 7$ (6) $e^{1+\ln 2}$

(2) $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3}$ (7) $e^{-2\ln 3}$

(3) $\frac{\ln 100}{\ln 10}$ (8) $\ln e^3 - \ln e^2$

(4) $\ln(10000) + \ln(0,01)$ (9) $\ln e\sqrt{e}$

(5) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ (10) $\ln 2 + \ln 8e - \ln 4e^2$

الحل – 33

(1) $\ln 14 - \ln 7 = \ln(2 \times 7) - \ln 7 = \ln 2 + \ln 7 - \ln 7 = \ln 2$

(2) $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 0$

(3) $\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{\ln (10)^2}{\ln (10)} = \frac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$

(4) $\ln(10000) + \ln(0,01) = \ln(10^4) + \ln(10^{-2}) = 4\ln(10) - 2\ln(10) = 2\ln(10)$

(5) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + e^{\ln 1/3} = 5 + \frac{1}{3} = 16/3$

(6) $e^{1+\ln 2} = e \times e^{\ln 2} = 2\,e$

(7) $e^{-2\ln 3} = e^{\ln(3^{-2})} = 3^{-2} = 1/9$

(8) $\ln e^3 - \ln e^2 = 3 - 2 = 1$

(9) $\ln e\sqrt{e} = \ln(e \times e^{1/2}) = \ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2}\ln e = \frac{3}{2}$

(10) $\ln 2 + \ln 8\,e - \ln 4\,e^2 = \ln 2 + \ln 8 + \ln e - (\ln 4 + \ln e^2)$

$= \ln 2 + \ln(2^3) + 1 - \ln(2^2) - \ln(e^2)$

$= \ln 2 + 3\ln 2 + 1 - 2\ln 2 - 2\ln e$

$= 4\ln 2 + 1 - 2\ln 2 - 2$

$= 2\ln 2 - 1$

التمرين ــ 34

أكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

(1) $A = 3\ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8$

(2) $B = 2\ln(0,1) - 3\ln(0,01) + \ln(2)$

(3) $C = 2\ln(100) - \ln(1/10)$

الحــل ــ 34

(1) $A = 3\ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8$

$= \ln(2^3) - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8$

$= \ln 8 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8$

$= \frac{3}{2}\ln 8 - \ln 5$

$= \ln(8)^{3/2} - \ln 5$

$= \ln 8\sqrt{8} - \ln 5$

$= \ln\left(\frac{8\sqrt{8}}{5}\right)$

لاحظ أن : $8^{3/2} = 8^1 \times 8^{1/2} = 8\sqrt{8}$

(2) $B = 2\ln(0,1) - 3\ln(0,01) + \ln(2)$

$= 2\ln(10^{-1}) - 3\ln(10^{-2}) + \ln 2$

$= -2\ln 10 + 6\ln 10 + \ln 2$

$= 4\ln 10 + \ln 2$

$= \ln(10^4) + \ln 2$

$= \ln(2 \times 10^4)$

$= \ln(20000)$

(3) $C = 2\ln(100) - \ln(1/10)$

$= 2\ln(10^2) - \ln(10^{-1})$

$= 4\ln(10) + \ln(10)$

$= 5\ln 10$

$= \ln(10^5)$

$= \ln(100000)$

التمرين ــ 35

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

أكتب العبارات التالية من الشكل $\ln x$

(1) $A = \ln a - \ln b + 2\ln a\,b$

(2) $B = \frac{1}{2}\ln a - \frac{3}{2}\ln b + \ln\frac{a}{b}$

(3) $C = \ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln b + \frac{3}{2}\ln(a+b)$

الحل – 35

(1) $A = \ln a - \ln b + 2\ln ab = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(ab)^2 = \ln\left(\frac{a}{b}\times(ab)^2\right) = \ln(ba^3)$

(2) $B = \frac{1}{2}\ln a - \frac{3}{2}\ln b + \ln\frac{a}{b} = \ln\sqrt{a} - \ln b\sqrt{b} + \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} + \ln\frac{a}{b}$

$= \ln\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\times\frac{a}{b} = \ln\frac{a\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}}$

(3) $C = \ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln b + \frac{3}{2}\ln(a+b) = \ln(a+1) - \ln\sqrt{b} + \ln(a+b)^{3/2}$

$= \ln\left(\frac{a+1}{\sqrt{b}}\right) + \ln(a+b)^{3/2}$

$= \ln\left(\frac{(a+1)(a+b)^{3/2}}{\sqrt{b}}\right)$

التمرين – 36

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $2\ln(x-3) = \ln 4$ **(4)** $\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln(3)$

(2) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$ **(5)** $\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$

(3) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x$ **(6)** $\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4)$

الحل – 36

(1)
$$2\ln(x-3) = \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ \ln(x-3)^2 = \ln 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ (x-3)^2 = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x-3=2 \text{ أو } x-3=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=5 \text{ أو } x=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=5$$

إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $\{5\}$

(2)
$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \\ \ln(x(x-1)) = \ln 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x^2-x=6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=3 \text{ أو } x=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{3\}$

(3)
$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x+4>0 \\ 2x>0 \end{cases}$$

$$\ln x^2 = \ln(x+4)(2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \\ x > 0 \\ x^2 = 2x^2 + 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+8) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \text{ أو } x = -8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in \phi$$

إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

(4)

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4 - x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ \ln x(4-x) = \ln(3(2x-1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ x > 1/2 \\ 4x - x^2 = 6x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ -x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ (x+3)(x-1) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x = -3 \text{ أو } x = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

منه : مجموعة حلول المعادلة هي $\{1\}$

(5)

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \ln(x+1) = -\ln e + \ln(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{e}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x + 1 = \frac{x-1}{e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ ex + e = x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(e-1) = -1 - e \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \dfrac{-1-e}{e-1} \end{cases}$ (مرفوض لأنه سالب)

$\Leftrightarrow \quad x \in \phi$ إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

(6) $\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+4 > 0 \\ \ln\left(\dfrac{x-1}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{x+4}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -4 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2}{x+4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x+4)(x-1) = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-2)(x+5) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 2 \text{ أو } x = -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ إذن : حلول المعادلة هي المجموعة $\{2\}$

التمرين ــ 37

حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$

(2) $\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

(3) $\ln(35 - 8x) \geq 3\ln 2 + \ln(x^2)$

الحـل ــ 37

(1) $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x > 4x - 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ 4x > 5 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[\\ x \in]5/4 ; +\infty[\\ (x-5)(x-1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]2 ; +\infty[\\ x \in]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \in]5 ; +\infty[$ إذن : حلول المتراجحة هي المجال $]5 ; +\infty[$

(2) $\ln(x) + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ \ln x(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ x \in IR \text{ (} x^2 - 2x + 2 > 0 \text{ لأن دائما)} \\ x(x+1) \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2/3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 2/3$ منه حلول المتراجحة هي المجال $]0\ ;\ 2/3]$

(3) $\ln(35 - 8x) \geq 3\ln 2 + \ln x^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 35 - 8x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \ln(35 - 8x) \geq \ln 8x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 35/8 \\ x \neq 0 \\ 35 - 8x \geq 8x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 35/8[\\ 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ (1) \end{cases}$$

لنحل المتراجحة (1) في IR : $\Delta = 64 + 32 \times 35 = 32(2 + 35) = 32 \times 37$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{32 \times 37}}{16} = \dfrac{-8 - 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} \\ x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{32 \times 37}}{16} = \dfrac{-8 + 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8} \end{cases}$$

منه : حلول المتراجحة $8x^2 + 8x - 35 \leq 0$ على IR هي المجال $\left[\dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8}\ ;\ \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8}\right]$

أي حلول الجملة : $\begin{cases} x \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 35/8[\\ 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \end{cases}$ هي المجال : $\left[\dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8}\ ;\ 0\right[\cup\left]0\ ;\ \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8}\right]$

التمرين ــ 38

أدرس إشارات العبارات الجبرية التالية :

(1) $\ln x - \ln 3$ **(3)** $(\ln x)(\ln x - 1)$

(2) $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$ **(4)** $2x\ln(1 - x)$

(5) $-x^2\ln(x + 1)$

الحـل ــ 38

لدراسة إشارة عبارة جبرية من الشكل $f(x)$ نبحث عن حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ ثم نستنتج حلول المتراجحة $f(x) < 0$ (باقي الأعداد الحقيقية)

(1) $\ln x - \ln 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \geq \ln 3 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases}$ منه جدول الإشارة كمايلي :

x	0		3		$+\infty$
$\ln x - \ln 3$	‖	-	0	+	

(2) $\ln x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e^{-1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1/e \end{cases}$ منه جدول الإشارة :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	-	0	+	

$\ln x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$ منه جدول الإشارة :

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	-	0	+	

خلاصة :

x	0		1/e		e		$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	-	0	+			
$\ln x - 1$	‖			-	0	+	
$(\ln x + 1)(\ln x - 1)$	‖	+	0	-	0	+	

(3)

$$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln 1 \end{cases}$$

$$\text{منه:} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$$

$$\text{منه:} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$$

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	-	0	+	

خلاصة :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+			
$\ln x - 1$	‖				0	+	
$\ln x(\ln x - 1)$	‖	+	0	-	0	+	

(4)

$$\ln(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ \ln(1 - x) \geq \ln 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{منه:} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1
$\ln(1 - x)$		+	0	-	▨

خلاصة :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\ln(1 - x)$		+	0	-	▨	▨	
$2x$		-	0	+			
$2x\ln(1 - x)$		-	0	-	▨	غير معرف	

(5)

$$\ln(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x > 0 \\ \ln(x + 1) \geq \ln 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{منه:} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x + 1)$	‖	-	0	+	

خلاصة :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\ln(x + 1)$		▨	▨	-	0	+	
$-x^2$				-	0	-	
$-x^2\ln(x + 1)$		غير معرف	▨	+	0	-	

التمرين — 39

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث : $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

1 — حل في IR المعادلة $p(x) = 0$

2 – إستنتج حلول المعادلة $(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0$ في IR

3 – إستنتج حلول المعادلة $[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0$ في IR

الحـل – 39

1 –

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y ; y \geq 0 \\ y^2 - 25y + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y ; y \geq 0 \\ (y-16)(y-9) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y ; y \geq 0 \\ y = 16 \text{ أو } y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ \text{أو} \\ x^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ أو } x = -3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{-4 ; -3 ; 3 ; 4\}$ و هي حلول المعادلة $p(x) = 0$

2 –

$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ \alpha \in \{-4 ; -3 ; 3 ; 4\} \end{cases}$$ حسب السؤال (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -4 \text{ أو } \ln x = -3 \text{ أو } \ln x = 3 \text{ أو } \ln x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x = e^{-4} \text{ أو } x = e^{-3} \text{ أو } x = e^3 \text{ أو } x = e^4)$$

إذن : حلول المعادلة المطلوبة هي : $\{e^{-4} ; e^{-3} ; e^3 ; e^4\}$

3 –

$$[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \\ y = \ln x \\ [(\ln y)]^4 - 25[(\ln y)]^2 + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \\ y = \ln x \\ y \in \{e^{-4} ; e^{-3} ; e^3 ; e^4\} \end{cases}$$ حسب السؤال (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \ln x = e^{-4} \text{ أو } \ln x = e^{-3} \text{ أو } \ln x = e^3 \text{ أو } \ln x = e^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{e^{-4}} ; (e)^{e^{-3}} ; (e)^{e^3} ; (e)^{e^4}\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{\frac{1}{e^4}} ; (e)^{\frac{1}{e^3}} ; (e)^{e^3} ; (e)^{e^4}\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{e^{e^{-4}} ; e^{e^{-3}} ; e^{e^3} ; e^{e^4}\}$ إذن : حلول المعادلة هي $\{e^{e^{-4}} ; e^{e^{-3}} ; e^{e^3} ; e^{e^4}\}$

لأن $e^x > 1$ من أجل $x > 0$

حذار ! $e^{e^\alpha} \neq (e^e)^\alpha$ و لكن $(e^e)^\alpha = e^{\alpha e}$

التمرين ـــ 40

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = 4x^2 - 4x - 3$

1 ـــ عين جذور كثير الحدود p

2 ـــ إستنتج حلول المعادلة $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$

3 ـــ إستنتج حلول المعادلة $\ln(4x - 3) = \ln(x + 3) - \ln x$

الحـــل ـــ 40

1 ـــ $p(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

إذن :
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4-8}{8} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

نتيجة : جذور كثير الحدود p هي $\{-1/2 \,;\, 3/2\}$

2 ـــ
$$4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ \alpha \in \{-1/2 \,;\, 3/2\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -1/2 \text{ أو } \ln x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{-1/2} \text{ أو } x = e^{3/2} \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$ هي $\{e^{-1/2} \,;\, e^{3/2}\}$

3 ـــ
$$\ln(4x - 3) = \ln(x + 3) - \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ \ln(4x - 3) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > 3/4 \\ 4x - 3 = \dfrac{x+3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x(4x - 3) = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ 4x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x = -1/2 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 3/2$ إذن : حلول المعادلة هي $\{3/2\}$

التمرين ـــ 41

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = 2x^2 - x - 1$

1 ـــ عين جذور كثير الحدود p

2 ـــ إستنتج تحليلا لـــ $2(\ln x)^2 - \ln x - 1$

3 ـــ إستنتج حلول المتراجحة $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0$ ثم المتراجحة $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 > 0$

الحــل ــ 41

1 ــ $p(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

إذن : $\begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ منه : جذور كثير الحدود P هي : $\{-1/2 ; 1\}$

2 ــ حسب السؤال الأول فإن : $p(x) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

إذن : نضع $\begin{cases} \alpha = \ln x \\ x > 0 \end{cases}$ منه : $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = p(\alpha)$

$= 2(\alpha - 1)(\alpha + \frac{1}{2})$

$= 2(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2})$ و هو التحليل المطلوب

3 ــ $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \le 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) \le 0$

إذن : يكفي دراسة إشارة $(\ln x - 1)$ ثم إشارة $(\ln x + \frac{1}{2})$ كمايلي :

$\ln x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \ge \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge e \end{cases}$

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$		-	0	+	

$\ln x + 1/2 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \ge -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \ge \ln e^{-1/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge e^{-1/2} \end{cases}$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$\ln x - 1/2$		-	0	+	

خلاصة :

x	0		$e^{-1/2}$		e		$+\infty$
$\ln x + 1/2$		-	0	+			
$\ln x - 1$				-	0	+	
الجداء		+	0	-	0	+	

حلول المتراجحة $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) \le 0$ هي المجال $[e^{-1/2} ; e]$

إذن حلول المتراجحة $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) > 0$ هي $]0 ; e^{-1/2}[U]e ; +\infty[$

التمرين ــ 42

حل في IR^2 جمل المعادلات التالية :

(1) $\begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln x/y = -\ln 3 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

الحــل ــ 42

(1)

$\begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 ; y > 0 \\ x + y = 60 \\ \ln xy = \ln 1000 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x + y = 60 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ x\,y = 1000 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) : $y = 60 - x$

إذن المعادلة (2) تصبح : $x(60 - x) = 1000$

أي : $60\,x - x^2 = 1000$

أي : $x^2 - 60\,x + 1000 = 0$ و هي معادلة من الدرجة 2 ذات المجهول x .

$\Delta = 3600 - 4000 = -400$ إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

نتيجة : الجملة لا تقبل حلولا في IR^2

(2)

$$\begin{cases} x^2 + 2\,y = 16 \\ \ln(x/y) = -\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,y > 0 \\ x^2 + 2\,y - 16 = 0 \\ \ln \dfrac{x}{y} = \ln(1/3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\,y > 0 \\ x^2 + 2\,y - 16 = 0 \;\ldots.\; (1) \\ x/y = 1/3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

من (2) : $y = 3\,x$

إذن : (1) تصبح : $x^2 + 2(3\,x) - 16 = 0$ أي $x^2 + 6\,x - 16 = 0$

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - 10}{2} = -8 \\ x_2 = \dfrac{-6 + 10}{2} = 2 \end{cases}$$

من أجل $x = -8$ فإن $y = 3(-8) = -24$ منه : $x\,y = -8(-24) = 192$ مقبول لأن $x\,y > 0$

من أجل $x = 2$ فإن $y = 3(2) = 6$ منه : $x\,y = 2(6) = 12$ مقبول لأن $x\,y > 0$

خلاصة : حلول الجملة هي الثنائيات : $\{(-8\,;\,-24)\,;\,(2\,;\,6)\}$

تحقيق :

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2\,y = 4 + 12 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(2/6) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x = -8 \\ y = -24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2\,y = 64 + 2(-24) = 64 - 48 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(-8/-24) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x\,y = \ln 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \;\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ x\,y = 60 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) : $y = 60/x$

إذن المعادلة (1) تصبح : $x^2 + (60/x)^2 = 169$ أي : $x^2 + \dfrac{3600}{x^2} = 169$

أي $\dfrac{x^4 + 3600}{x^2} = 169$ أي $x^4 - 169\,x^2 + 3600 = 0$

نضع $\alpha = x^2$ حيث $\alpha \geq 0$ إذن : $\alpha^2 - 169\,\alpha + 3600 = 0$

$$\Delta = (169)^2 - 4(3600) = (169)^2 - (120)^2 = (169 - 120)(169 + 120) = 49 \times 289 = (7 \times 17)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{169 - 7 \times 17}{2} = \dfrac{169 - 119}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \\ \alpha_2 = \dfrac{169 + 7 \times 17}{2} = \dfrac{169 + 119}{2} = \dfrac{288}{2} = 144 \end{cases}$$

إذن : $x^2 = 25$ أو $x^2 = 144$

منه : $x \in \{-5 ; 5 ; -12 ; 12\}$

لكن : $x > 0$ إذن : $x \in \{5 ; 12\}$

من أجل $x = 5$ فإن $y = 60/5 = 12$

من أجل $x = 12$ فإن $y = 60/12 = 5$

خلاصة : حلول الجملة (3) هي الثنائيات $\{(5 ; 12) ; (12 ; 5)\}$

(4)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \ ; \ y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x\, y = \ln 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \ ; y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x\,y = 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) : $y = 2/x$

إذن المعادلة (1) تصبح : $x^3 + (2/x)^3 = 9$ أي $x^3 + \frac{8}{x^3} = 9$ أي $\frac{x^6 + 8}{x^3} = 9$

أي $x^6 + 8 = 9x^3$ أي $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

نضع $\alpha = x^3$ إذن : $\alpha^2 - 9\alpha + 8 = 0$ أي $(\alpha - 8)(\alpha - 1) = 0$

أي $\alpha = 1$ أو $\alpha = 8$

منه : $x^3 = 1$ أو $x^3 = 8$

أي : $x = 1$ أو $x = 2$

من أجل $x = 1$ فإن $y = 2/1 = 2$

من أجل $x = 2$ فإن $y = 2/2 = 1$

خلاصة : حلول الجملة (4) هي الثنائيات $\{(2 ; 1) ; (1 ; 2)\}$

التمرين ـــ 43

عين أصغر عدد طبيعي n في كل من الحالات التالية :

(1) $(1/2)^n \leq 0{,}02$ **(3)** $(1{,}2)^n \geq 1040$

(2) $(0{,}8)^n \leq 0{,}01$ **(4)** $21000(1 + 0{,}035)^n \geq 30000$

الحــل ـــ 43

(1)

$$(1/2)^n \leq 0{,}02 \Rightarrow \ln((1/2)^n) \leq \ln(0{,}02)$$
$$\Rightarrow n\ln(1/2) \leq \ln(2/100)$$
$$\Rightarrow -n\ln 2 \leq \ln 2 - \ln 100$$
$$\Rightarrow -n \leq 1 - \frac{\ln 100}{\ln 2}$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 2} - 1$$

(باستعمال الحاسبة) $\Rightarrow n \geq 6{,}643 - 1$

(لأن $n \in IN$ أصغر عدد طبيعي) $\Rightarrow n = 6$

(2)

$$(0{,}8)^n \leq 0{,}01 \Rightarrow \ln((0{,}8)^n) \leq \ln(0{,}01)$$
$$\Rightarrow n\ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$$

لأن $\ln(0{,}8) < 0$ $\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$

باستعمال الحاسبة $\Rightarrow n \geq 20{,}63$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 21$

(3)

$$(1{,}2)^n \geq 1040 \Rightarrow \ln((1{,}2)^n) \geq \ln(1040)$$
$$\Rightarrow n\ln(1{,}2) \geq \ln(1040)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(1040)}{\ln(1,2)}$$

$$\Rightarrow n \geq 38,10$$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 39$

(4) $21000(1 + 0,035)^n \geq 30000 \Rightarrow (1 + 0,035)^n \geq \frac{30000}{21000}$

$$\Rightarrow n \ln(1,035) \geq \ln 30 - \ln 21$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 30 - \ln 21}{\ln(1,035)}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0,35667}{0,0344}$$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 11$

التمرين – 44

$(u_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $3/2$

إبتداءا من أي رتبة n تكون حدود المتتالية (u_n) أكبر من 10^5 ؟.

الحـل – 44

عبارة الحد العام : $u_n = u_0(3/2)^n$ أي $u_n = 2(3/2)^n$

منه : $u_n > 10^5 \Rightarrow 2(3/2)^n > 10^5$

$$\Rightarrow \ln [2(3/2)^n] > \ln(10^5)$$

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln(3/2)^n > 5 \ln 10$$

$$\Rightarrow n \ln(3/2) > 5 \ln 10 - \ln 2$$

$\Rightarrow n > \frac{5 \ln 10 - \ln 2}{\ln(3/2)}$ لأن $\ln(3/2) > 0$

$$\Rightarrow n > 26,68$$

أصغر عدد طبيعي . $\Rightarrow n = 27$

التمرين – 45

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

الحـل – 45

f معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \ln x = -\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{-1}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-x-1}{x^2}$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-x-1$	$-$
x^2	$+$
$\frac{-x-1}{x^2}$	$-$

منه جدول التغيرات :

التمرين ـ 46

f دالة معرفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

أدرس تغيرات الدالة f على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

الحل ـ 46

f معرفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1\\ x<1}} \frac{1}{\ln x} = \lim_{\substack{y \to 0\\ y<0}} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1\\ x>1}} \frac{1}{\ln x} = \lim_{\substack{y \to 0\\ y>0}} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

x	0		1		$+\infty$
ln x		-	0	+	

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \frac{-1}{x[\ln x]^2}$$

إذن : من أجل كل x من $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ فإن $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

التمرين ـ 47

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = 2\,[\ln x]^2 - \ln x - 3$

الحل ـ 47

f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = +\infty$$ لأن $$\lim_{\substack{x \to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x\left[2\ln x - 1 - \frac{3}{\ln x}\right] = +\infty$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x - 1)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ هي إشارة $(4\ln x - 1)$ لأن $1/x > 0$

$$4\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1/4$$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{1/4}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{1/4}$

منه جدول إشارة $f'(x)$:

x	0		$e^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$e^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-25}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{1/4}) = 2(\ln e^{1/4})^2 - \ln e^{1/4} - 3 = 2(1/4)^2 - \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = \frac{1-2-24}{8} = \frac{-25}{8}$$

التمرين – 48

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \ln x$ (5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3 + \ln x}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln x$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)\ln x$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x$ (7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x + 5 - \ln x$ (8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)\ln(-x)$

الحـل – 48

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \ln x = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x + 5 - \ln x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{3 + y} = 0$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)\ln x = -\infty$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{2\ln x} = \frac{1}{2}$ لأن $x > 0$ إذن $\ln x^2 = 2\ln x$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)\ln(-x) = +\infty$

التمرين – 49

أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

الحـل – 49

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} + 1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{1}{\ln x} - 1} = 1/-1 = -1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

التمرين – 50

f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \ln[\ln(x-1)]$

1 – بين أن f معرفة من أجل كل x من المجال $]2 ; +\infty[$

2 – أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحـل – 50

1 – f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1>0 \\ \ln(x-1)>0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>1 \\ \ln(x-1)>\ln 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x>1 \\ x-1>1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>1 \\ x>2 \end{cases}$ أي $x>2$

منه : f معرفة من أجل كل x من المجال $]2 ; +\infty[$

2 – لدينا : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-1) = 1$ إذن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \ln(x-1) = \ln(1) = 0$

منه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \ln[\ln(x-1)] = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y$

أي : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

منه : $\lim_{x \to +\infty} \ln[\ln(x-1)] = \lim_{y \to +\infty} \ln y$

أي : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين – 51

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$ (3) $\lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\ln(1+x/2)}{x}\right)$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ (4) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

الحـل – 51

لاحظ أن عند التعويض في الحساب نحصل على حالة عدم التعيين لأن البسط و المقام يؤولان إلى صفر معا إذن يجب إزالة حالة عدم التعيين في كل مرة . لذلك نلجأ إلى إستعمال تعريف العدد المشتق كمايلي :

1 – لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(1+2x)$ على المجال $]-1/2 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]-1/2 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$

إذن : $f'(0) = \frac{2}{1+0} = 2$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 0}{x}$ لأن $f(0) = 0$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

منه : $2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

أي : $1 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

خلاصة : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$

2 ـ نعرف الدالة f على المجال $]-1/3 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(1+3x)$

f قابلة للاشتقاق على $]-1/3 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{3}{1+3x}$

إذن : $f'(0) = \frac{3}{1+0} = 3$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x) - 0}{x}$ لأن $f(0) = 0$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

أي : $3 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

خلاصة : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3$

3 ـ نعرف الدالة f على المجال $]-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$

f قابلة للاشتقاق على $]-2 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}x}$

إذن : $f'(0) = \frac{1/2}{1+0} = 1/2$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي : $1/2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2}x) - 0}{x}$

أي : $1/2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x}$

خلاصة : $\lim_{x \to 0} \frac{2\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} = 2/2 = 1$

4 ـ نضع $y = \sqrt{x}$ إذن : لما $x \overset{>}{\to} 0$ فإن $y \overset{>}{\to} 0$

منه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

إذن : نعتبر الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ معرفة بـ $f(y) = \ln(1+y)$

منه : $f'(y) = \frac{1}{1+y}$ أي $f_d'(0) = 1$ العدد المشتق على اليمين .

لكن تعريفا : $f_d'(0) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0}$

أي : $1 = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

خلاصة : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 1$

التمرين – 51

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0

الحـل – 51

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$$

(بوضع $x^2 = y$ حيث $y > 0$) $= \lim_{y \to 0} \dfrac{\ln(y+1)}{y}$

$= 1$ حسب التمرين 57 .

إذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0) = 1$

التمرين – 52

عين مجموعات تعريف ثم مشتقات الدوال التالية :

(1) $f(x) = x + \ln x$ (9) $f(x) = \ln(-2x - 1)$

(2) $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$ (10) $f(x) = 1/2\,[\ln(1-x)]^2$

(3) $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$ (11) $f(x) = x(2 - \ln x^2)$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ (12) $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$

(5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (13) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(6) $f(x) = x\ln x - x$ (14) $f(x) = \dfrac{2x - 1 + \ln x}{x}$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ (15) $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$

(8) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ (16) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x - 1}$

الحـل – 52

(1) $f(x) = x + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

(2) $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x}$

(3) $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(2\ln x + 1)$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

منه : f معرفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

(6) $f(x) = x\ln x - x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - 1 = \ln x$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-1}{x} + 1\right) = \dfrac{x-1}{x^2}$

(8) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x}$

(9) $f(x) = \ln(-2x-1)$ إذن : f معرفة من أجل $-2x-1 > 0$

أي : $x < -1/2$

منه : f معرفة على $]-\infty\,;-1/2[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-2}{-2x-1} = \dfrac{2}{2x+1}$

(10) $f(x) = 1/2\,[\ln(1-x)]^2$ إذن : f معرفة من أجل $1-x > 0$ أي $x < 1$

منه : f معرفة على $]-\infty\,;1[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1/2\left[2\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)\ln(1-x)\right] = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$

(11) $f(x) = x(2 - \ln x^2)$ إذن : f معرفة من أجل $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$

منه : f معرفة على $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = (2 - \ln x^2) + x\left(-\dfrac{2x}{x^2}\right) = -\ln x^2$

(12) $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$ إذن : f معرفة من أجل $2x^2 + x - 6 > 0$

أي $2(x+2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) > 0$

أي $x \in]-\infty\,;-2[\cup]3/2\,;+\infty[$

منه : f معرفة على $]-\infty\,;-2[\cup]3/2\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+x-6}$

(13) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 1 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases}$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

(14) $f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)x - (2x-1+\ln x)}{x^2} = \frac{2-\ln x}{x^2}$

(15) $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} - \frac{1}{2}(2x) = 2x \ln x + x - x = 2x \ln x$

(16) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$

منه : f معرفة على $]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x - 1)^2} = \dfrac{\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}$

التمرين ــ 53

f دالة معرفة على $]2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = -x + 1 + \ln x$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة e .

الحــل ــ 53

المعادلة تكتب من الشكل : $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

لدينا : $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$

منه : $f'(e) = \frac{1-e}{e}$

من جهة أخرى : $f(e) = -e + 1 + \ln e = -e + 2$

إذن : معادلة المماس هي : $y = \frac{1-e}{e}(x-e) - e + 2$

أي : $y = \frac{1-e}{e}x - (1-e) - e + 2$

أي : $y = \frac{1-e}{e}x - 1 + e - e + 2$

أي : $y = \frac{1-e}{e}x + 1$

التمرين – 54

f دالة معرفة على $]-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 3\ln(2 + x) + x^2 - 3x$

بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل .

الحــل – 54

يكون للمنحنى (C) مماس موازي لمحور الفواصل عند نقطة ذات الفاصلة x إذا و فقط إذا كان ميله معدوم أي $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{3}{2+x} + 2x - 3 = \frac{3 + (2x-3)(2+x)}{2+x} = \frac{2x^2 + x - 3}{x+2}$$

منه :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2 ; +\infty[\\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2 ; +\infty[\\ 2(x-1)(x+3/2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2 ; +\infty[\\ x = 1 \text{ أو } x = -3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{1 ; -3/2\}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى (C) كل منهما موازي لحامل محور الفواصل

أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1 و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة $-3/2$

التمرين – 55

إذا علمت أن $\log(3{,}81) \approx 0{,}58092$ أعط قيمة تقريبية للأعداد التالية :

(1) $\log(381)$ (2) $\log(0{,}381)$ (3) $\log(3{,}81 \times 10^{-3})$

الحــل – 55

(1)

$$\log(381) = \log(3{,}81 \times 10^2)$$
$$= \log(3{,}81) + \log(10^2)$$
$$= \log(3{,}81) + 2\log(10)$$
$$\approx 0{,}58092 + 2 \quad \text{لأن } \log(10) = 1$$
$$\approx 2{,}58092$$

(2)

$$\log(0{,}381) = \log(3{,}81 \times 10^{-1})$$
$$= \log(3{,}81) + \log(10^{-1})$$
$$= \log(3{,}81) - \log(10)$$
$$\approx 0{,}58092 - 1$$
$$\approx -0{,}41908$$

(3)

$$\log(3{,}81 \times 10^{-3}) = \log(3{,}81) + \log(10^{-3})$$
$$= \log(3{,}81) - 3\log(10)$$
$$\approx 0{,}58092 - 3$$
$$\approx -2{,}41908$$

التمرين – 56

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $\log x = 5$ (2) $\log x = -3$ (3) $\log x = 0{,}01$

الحــل – 56

(1)

$$\log x = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5\ln 10 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln 10^5 = \ln x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 10^5$ إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^5\}$

(2) $\log x = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{-3}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{-3} \end{cases}$

$x = 10^{-3}$ ⇔ إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^{-3}\}$

ملاحظة : يمكن الإجابة عن السؤال الأول بهذه الطريقة أي دون الرجوع إلى العلاقة $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

(3) $\log x = 0,01 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{0.01}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{0.01} \end{cases}$

$x = 10^{0.01}$ ⇔ منه : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^{0,01}\}$

التمرين ــ 57

حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $\log x > 4$ **(3)** $\log x \geq 0,1$

(2) $\log x < -10$ **(4)** $\log x < \log(1-x)$

الحـل ــ 57

بما أن الدالة log لها نفس خواص الدالة ln فإن يمكن حل هذه المتراجحات كمايلي :

(1) $\log x > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x > \log(10^{4}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 10^{4} \end{cases}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]10^{4} ; +\infty[$

(2) $\log x < -10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < \log(10^{-10}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10^{-10} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < 10^{-10}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]0 ; 10^{-10}[$

(3) $\log x \geq 0,1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x \geq \log(10^{0.1}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10^{0.1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \geq 10^{0.1}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $[10^{0.1} ; +\infty[$

(4) $\log x < \log(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \\ x < 1 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1/2$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]0 ; 1/2[$

التمرين ــ 58

حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' = 3y$ (3) $2y' + 5y = 0$

(2) $y' + 2y = 0$ (4) $\frac{1}{2}y' = 4y$

الحــل ــ 58

بالرجوع إلى الدرس لدينا حل المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = a\,y$

حيث $a \in R^*$ هي الدوال من الشكل $y = c\,e^{ax}$ حيث $c \in R^*$ كمايلي :

(1) $y' = 3y$ إذن : $y = c\,e^{3x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(2) $y' + 2y = 0$ أي $y' = -2y$

منه : $y = c\,e^{-2x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(3) $2y' + 5y = 0$ أي $y' = \frac{-5}{2}y$

منه : $y = c\,e^{\frac{-5}{2}x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(4) $\frac{1}{2}y' = 4y$ أي $y' = 8y$

منه : $y = c\,e^{8x}$ حيث c ثابت حقيقي .

التمرين ــ 59

1 ــ حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 0$

2 ــ عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4) = 1$

الحــل ــ 59

1 ــ $2y' + y = 0 \ldots\ldots(\alpha)$ إذن : $y' = \frac{-1}{2}y$

منه : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x}$ حيث c ثابت حقيقي .

2 ــ لتكن f حل للمعادلة التفاضلية (α) إذن : $f(x) = c\,e^{\frac{-1}{2}x}$ مع c ثابت حقيقي .

لدينا :

$$f(\ln 4) = 1 \Leftrightarrow c\,e^{\frac{-1}{2}\ln 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln 4}}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right) = 1 \quad \text{لأن} \quad \left(e^{\frac{1}{2}\ln 4} = e^{\frac{1}{2}\times 2\ln 2} = e^{\ln 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c/2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

نتيجة : $f(x) = 2\,e^{\frac{-1}{2}x}$ هي الحل الخاص المطلوب .

التمرين ــ 60

f هي حل المعادلة التفاضلية $2y' + y - 5 = 0$

هل منحنى الدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 5/2$ ؟

الحــل ــ 60

المعادلة $2y' + y - 5 = 0$ تكافئ $y' = \frac{-1}{2}y + 5/2 \ldots\ldots\ldots(\alpha)$

و هي من الشكل $y' = a\,y + b$

منه : حلولها $y = c\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $a \neq 0$

أي : حلول المعادلة (α) هي : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x} - \left(\frac{5/2}{-1/2}\right)$ حيث c ثابت حقيقي .

أي : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x} + 5$

منه : $f(x) = c\,e^{\frac{-1}{2}x} + 5$ حيث c ثابت حقيقي

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} c\, e^{\frac{-1}{2}x} + 5 = 5$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-1}{2}x} = 0$

إذن : منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته $y = 5$ (و ليس $y = 5/2$)

<u>التمرين ـــ 61</u>

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 3\,e^{-2x} - 4$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\,y + b$ حيث تكون الدالة f حلا لها .

<u>الحـــل ـــ 61</u>

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :

$$f(x) = 3\,e^{-2x} - 4 = 3\,e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$$

نضع $\begin{cases} c = 3 \\ a = -2 \\ b = -8 \end{cases}$ إذن : $f(x) = c\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

منه : f هي حل للمعادلة التفاضلة $y' = a\,y + b$

أي f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2\,y - 8$

تحقيق : $f'(x) = -6\,e^{-2x}$

من جهة أخرى : $-2\,f(x) - 8 = -2(3\,e^{-2x} - 4) - 8 = -6\,e^{-2x}$

إذن فعلا : $f'(x) = -2\,f(x) - 8$

أي : f هي حل للمعادلة $y' = -2\,y - 8$

الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6\,e^{-2x} \\ &= -2\,[3\,e^{-2x}] \\ &= -2\,[3\,e^{-2x} - 4 + 4] \\ &= -2\,[3\,e^{-2x} - 4] - 8 \\ &= -2\,f(x) - 8 \end{aligned}$$

إذن .... هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2\,y - 8$

<u>التمرين ـــ 62</u>

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 2\,e^{-5x}$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\,y$ حيث تكون الدالة f حلا لها .

<u>الحـــل ـــ 62</u>

نضع : $\begin{cases} c = 2 \\ a = -5 \end{cases}$ إذن : $f(x) = c\,e^{ax}$

منه : f هي حل للمعادلة التفاضلة $y' = a\,y$

أي f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -5\,y$

تحقيق : $f'(x) = -10\,e^{-5x} = -5(2\,e^{-5x}) = -5\,f(x)$

إذن : f هي فعلا حل للمعادلة $y' = -5\,y$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

1 ــ حل في IR المعادلة $2t^2 - 5t + 2 = 0$ ذات المجهول t .

2 ــ حل في IR^2 الجملة : $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$ ذات المجهولين x و y

الحـل ــ 1

1 ــ $2t^2 - 5t + 2 = 0$ معادلة من الدرجة 2 : $\Delta = 25 - 16 = 9$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ t_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{2 ; 1/2\}$

2 ــ $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ t > 0 \text{ و } t = e^x \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 2 \text{ أو } t = 1/2 \\ t = e^x \\ 1/e^x = e^y \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} e^x = 2 \text{ أو } e^x = 1/2 \\ y = \ln(1/e^x) = -x \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \ln 2 \text{ و } y = -\ln 2 \\ \text{أو} \\ x = \ln(1/2) \text{ و } y = -\ln(1/2) \end{cases}$

إذن : حلول الجملة هي الثنائيات $\{(\ln 2 ; -\ln 2) ; (\ln 1/2 ; -\ln 1/2)\}$

التمرين ــ 2

حل في IR المعادلتين التاليتين :

(1) $e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0$

(2) $\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2$

الحـل ــ 2

(1) $e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(e^{2x+2} - e^{x+1} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x+2} - e^{x+1} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^2(e^x)^2 - e(e^x) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^2t^2 - et - 2 = 0 \text{..............}(\alpha) \\ t > 0 \text{ و } e^x = t \end{cases}$

المعادلة (α) من الدرجة الثانية ذات المجهول الموجب t إذن :

$\Delta = e^2 + 8e^2 = 9e^2 = (3e)^2$

منه : $\begin{cases} t_1 = \dfrac{e - 3e}{2e^2} & \text{مرفوض لأنه سالب} \\ t_2 = \dfrac{e + 3e}{2e^2} = \dfrac{4e}{2e^2} = \dfrac{2}{e} & \text{مقبول} \end{cases}$

إذن : $e^x = t_2 \Rightarrow e^x = 2/e$

$\Rightarrow x = \ln(2/e)$

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $\{\ln(2/e)\}$

(2)

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \ln|2x+1||x-1| = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ \ln|(2x+1)(x-1)| = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ |2x^2 - x - 1| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 2 \text{ أو } 2x^2 - x - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \text{ أو } 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

المعادلة $2x^2 - x - 3 = 0$	المعادلة $2x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 1 + 24 = 25$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-5}{4} = -1 \\ x_2 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$	$\Delta = 1 - 8 = -7$ لا تقبل حلولا في R

نتيجة :

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ x = -1 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1 ; 3/2\}.$$

منه : حلول المعالدلة هي $\{-1 ; 3/2\}$

التمرين ــ 3

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بــ $\mathbf{f(x) = \ln x - \sqrt{x}}$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2x}$

2 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ (دون حساب النهاية عند $+\infty$)

3 ــ أثبت أن من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $\ln x < \sqrt{x}$

4 ــ بين أن من أجل كل x حيث $x > 1$ فإن : $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **ثم إستنتج** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

الحــل ــ 3

ــ 1

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$ و هو المطلوب

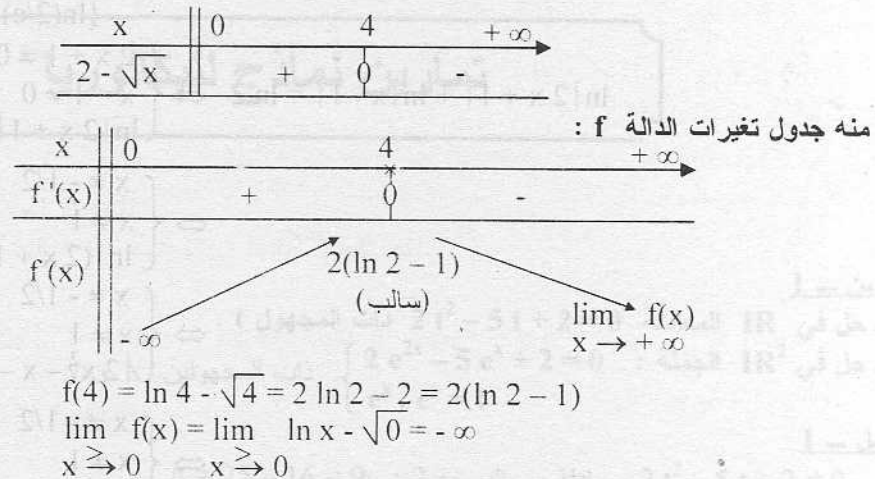
2 ــ إشارة $f'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $2 - \sqrt{x}$ لأن $2x > 0$ كما يلي :

x	0		4		$+\infty$
$2-\sqrt{x}$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2(\ln 2-1)$ (سالب)	↘	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$f(4)=\ln 4-\sqrt{4}=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x-\sqrt{0}=-\infty$

لاحظ أن الدالة f متناقصة على المجال $]4 ; +\infty[$

و بماأن $f(4)<0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)<0$

3 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن :

$f(x)<0$ أي $\ln x-\sqrt{x}<0$ منه $\ln x<\sqrt{x}$ و هو المطلوب .

4 ـ لدينا : $\begin{cases}\ln x<\sqrt{x}\\ x>1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\ln x<\sqrt{x}\\ 1/x>0\end{cases}$

منه : $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ (ضرب الطرفين في $1/x$)

أي $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ......(α)

من جهة أخرى : $x>1$ إذن : $\ln x>0$ أي $\dfrac{\ln x}{x}>0$ ......(β)

نتيجة : من العلاقتين (α) و (β) نستنتج أن : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5 ـ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

حسب نظرية الحصر : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ إذن $0<\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}<0$

أي $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

ملاحظة : هذه النتيجة ستستعمل في التمارين المقبلة .

<u>التمرين ـ 4</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=a\,e^{2x}+b\,e^{x}+c$ حيث a ; b ; c أعداد حقيقية .

نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ـ عين a ; b ; c حتى يشمل المنحنى (C) النقطة $O(0 ; 0)$ و $f'(\ln(3/4))=0$ و المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

لتكن الدالة f معرفة على IR بـ $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$

2 ـ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة f

4 ـ حدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5 ـ عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

6 ـ أنشئ المنحنى (C)

<u>**الحـل ـ 4**</u>

1 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

إذن : يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$ إذا و فقط إذا كان :

منه : $c = 1$ ، $f(x) = a e^{2x} + b e^{x} + 1$:

المنحنى (C) يشمل المبدأ (0 ; 0) إذن : $f(0) = 0$ أي : $a + b + 1 = 0$ .... (α)

$f'(x) = 2 a e^{2x} + b e^{x}$ إذن : $f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2 a\left(\frac{3}{4}\right)^2 + b\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} a + b\right)$

منه : $f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} a + b = 0$

$\Leftrightarrow 3 a + 2 b = 0$ .... (β)

لنحل الجملة $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3 a + 2 b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2 a + 2 b = -2 \\ 3 a + 2 b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

أخيرا : $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$ أي $f(x) = 2 e^{2x} - 3 e^{x} + 1$

2 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(2 e^{x} - 3 + e^{-x}) = +\infty$

3 ـ f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = 4 e^{2x} - 3 e^{x}$

$= e^{x}(4 e^{x} - 3)$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $4 e^{x} - 3$ كمايلي :

$4 e^{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq 3/4$

$\Leftrightarrow e^{x} \geq e^{\ln(3/4)}$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(3/4)$

x	$-\infty$		$\ln(3/4)$		$+\infty$
$4 e^{x} - 3$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$\ln(3/4)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-			0	+			
$f(x)$	1	↘	0	↘	$-1/8$	↗	0	↗	$+\infty$

$f\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 - 18 + 8}{8} = -\frac{1}{8}$

4 ـ نقاط التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 e^{2x} - 3 e^{x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x} \;:\; y > 0 \\ 2 y^2 - 3 y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x} \;:\; y > 0 \\ 2(y - 1)(y - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x} = 1 \\ \text{أو} \\ e^{x} = 1/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 1 \\ \text{أو} \\ x = \ln(1/2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -\ln 2 \end{cases}$

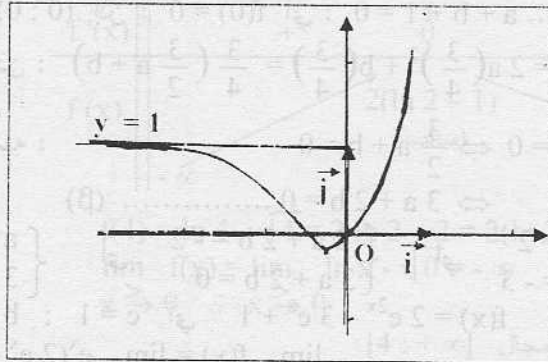
نتيجة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين إحداثياهما $(0\,;\,0)$ ؛ $(-\ln 2\,;\,0)$

5 ــ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

حيث : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

منه : المعادلة هي : $y = x$

6 ــ الإنشاء :

التمرين ــ 5

لتكن المعادلتين التفاضليتين : $(E_1) : y' - 2y = 0$ ؛ $(E_2) : y' = y$

1 ــ حل المعادلتين (E_1) و (E_2)

2 ــ عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) حيث $f_1'(0) = 4$

3 ــ عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) حيث $f_2(0) = 1$

g دالة المعرفة على IR بـ $g(x) = 2e^{2x} - e^x$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة g

5 ــ عين معادلة المستقيم المقارب لمنحنى الدالة g .

6 ــ عين نقط تقاطع منحنى الدالة g مع محوري الإحداثيات .

7 ــ أنشئ منحنى الدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

الحــل ــ 5

1 ــ ليكن c ثابت حقيقي $y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y$

$\Rightarrow y = c\,e^{2x}$

إذن : حلول المعادلة (E_1) هي الدوال من الشكل $f(x) = c\,e^{2x}$ حيث c ثابت حقيقي .

ليكن α ثابت حقيقي $y' = y \Rightarrow y = \alpha\,e^x$

إذن : حلول المعادلة (E_2) هي الدوال من الشكل $f(x) = \alpha\,e^x$ حيث α ثابت حقيقي .

2 ــ f_1 حل للمعادلة (E_1) إذن : $f_1(x) = ce^{2x}$

منه : $f_1'(x) = 2\,c\,e^{2x}$

إذن : $f_1'(0) = 4 \Leftrightarrow 2c = 4$

$\Leftrightarrow c = 2$

منه : $f_1(x) = 2\,e^{2x}$ و هي الدالة f_1 المطلوبة .

3 ــ f_2 حل المعادلة (E_2) إذن : $f_2(x) = \alpha\,e^x$

منه : $f_2(0) = \alpha$

إذن : $f_2(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

إذن : $f_2(x) = e^x$ و هي الدالة f_2 المطلوبة .

4 ــ تغيرات الدالة g : (لاحظ أن $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$)

g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x(2e^x - 1) = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$g'(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1)$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $4e^x - 1$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

$4e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1/4$

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$4e^x - 1$	-	0	+

$\Leftrightarrow\ x \geq \ln(1/4)$

$\Leftrightarrow\ x \geq -\ln 4$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	0	↘	$\frac{-1}{8}$	↗	$+\infty$

$$g(-\ln 4) = 2(4^{-2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8}$$

5 ـ بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة g عند $-\infty$

6 ـ **التقاطع مع محور التراتيب :** $g(0) = 2 - 1 = 1$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور التراتيب عند النقطة $(0 ; 1)$

التقاطع مع محور الفواصل : $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2e^x - 1) = 0$

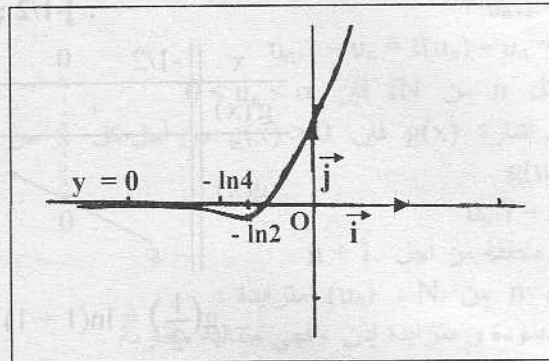
$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1/2$

$\Leftrightarrow x = \ln(1/2)$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(-\ln 2 ; 0)$

7 ـ **الإنشاء :**

__التمرين ـ 6__

__الجزء I :__ f دالة معرفة على $I =]-1/2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(1 + 2x)$

1 ـ بين أن f متزايدة تماما على I .

2 ـ أحسب نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $-1/2$ بقيم كبرى .

لتكن g دالة معرفة على I بـ $g(x) = f(x) - x$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة g على المجال I .

4 ـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الأخر α حيث $1 < \alpha < 2$

5 ـ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I .

6 ـ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; \alpha[$ فإن $f(x) \in]0 ; \alpha[$

__الجزء II :__ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in]0 ; \alpha[$

2 ـ برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة

3 ـ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

__الحـل ـ 6__

__الجزء I :__

1 ـ f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{2}{1 + 2x}$

إذن : من أجل كل x من I فإن $f'(x) > 0$ لأن $(1 + 2x) > 0$

منه : f متزايدة تماما على المجال I .

2 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1/2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1/2} \ln(1 + 2x) = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y = -\infty$

3 ـ **تغيرات الدالة g :** g معرفة على $]-1/2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1/2} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1/2} \ln(1+2x) - x = -\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} -1/2} \ln(1+2x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+2x) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1+2x)\left[\frac{\ln(1+2x)}{(1+2x)} - \frac{x}{1+2x}\right]$$

نضع $y = 1 + 2x$ إذن $\lim_{x \to +\infty} (1+2x) = \lim_{y \to +\infty} y$ 。 $= \lim_{y \to +\infty} y\left[\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{2}\right]$

لأن $\lim \frac{\ln y}{y} = 0$ حسب التمرين 3 $= \lim_{x \to +\infty} y\left(-\frac{1}{2}\right)$

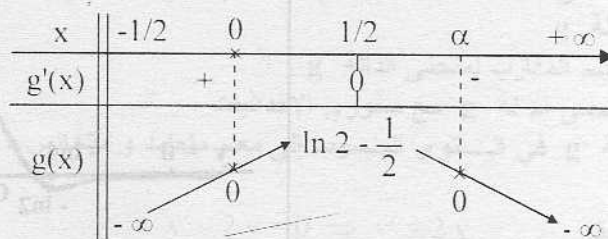
$= -\infty$

g قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{2-1-2x}{1+2x} = \frac{1-2x}{1+2x}$$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1 - 2x$ لأن $(1 + 2x) > 0$

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
$1 - 2x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-1/2 ; +\infty[$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1+1) - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$$

4 ــ من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن g تنعدم مرتين أي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في المجال I .

$g(0) = \ln 1 - 0 = 0$ إذن : أحد حلول المعادلة $g(x) = 0$ هو 0

الحل الأخر :

$g(1) = \ln(1+2) - 1 = \ln 3 - 1 > 0$

$g(2) = \ln(1+4) - 2 = \ln 5 - 2 < 0$

لدينا $\left\{\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على المجال } [1 ; 2] \\ g(1) \times g(2) < 0 \end{array}\right.$

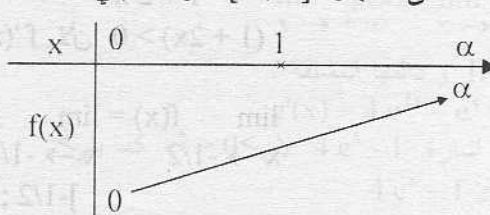
إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $1 < \alpha < 2$ و هو المطلوب .

5 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	-1/2		0		α		+∞
g(x)		-	0	+	0	-	

6 ــ حسب السؤال (1) فإن f متزايدة تماما على I و خاصة على $[0 ; \alpha]$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \\ f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha \quad \text{لأن } g(\alpha) = 0 \end{array}\right.$

إذن : جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \alpha]$ هو كما يلي :

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; \alpha[$ فإن $f(x) \in]0 ; \alpha[$ و هو المطلوب . (لأن f مستمرة)

الجزء II :

1 ـ البرهان بالتراجع أن : $u_n \in]0 ; \alpha[$ من أجل كل عدد طبيعي n

من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ و $0 < 1 < \alpha$ محقق .

من أجل $n = 1$: $u_1 = f(u_0)$ أي $u_1 = f(1)$ أي $0 < u_1 < \alpha$ لأن $0 < f(1) < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$

نفرض أن $0 < u_n < \alpha$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} < \alpha$ ؟

لدينا : $0 < u_n < \alpha$ إذن : $0 < f(u_n) < \alpha$ أي $0 < u_{n+1} < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل $(n + 1)$.

نتيجة : من أجل كل n من N فإن $0 < u_n < \alpha$.

2 ـ البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة :

من أجل $n = 1$: $u_1 - u_0 = f(1) - 1 = g(1)$

لكن حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(1) > 0$

إذن : $u_1 - u_0 > 0$

منه : (u_n) متزايدة من أجل $n \in \{0 ; 1\}$

نفرض أن (u_n) متزايدة من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} - u_n > 0$ ؟

لدينا $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

لكن من أجل كل n من IN فإن $0 < u_n < \alpha$

و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل x من $]0 ; \alpha[$

إذن : $g(u_n) > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من N : (u_n) متزايدة .

3 ـ لدينا (u_n) محدودة و متزايدة إذن : فهي متتالية متقاربة .

<u>التمرين ـ7</u>

f دالة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ 0 : x = 1 \\ \ln(x) \times \ln(1-x) : x \in]0 ; 1[\end{cases}$$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نقبل أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 0$ و من أجل $\alpha > 0$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{\alpha} \ln x = 0$

1 ـ عين $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ ثم إستنتج $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x}$

2 ـ بين أن من أجل كل x من المجال $]-1/2 ; 1/2[$: $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$. فسر النتيجة هندسيا .

لتكن ϕ دالة معرفة على $]0 ; 1[$ بـ $\phi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$

3 ـ أحسب $\phi'(x)$ ثم بين أن $\phi''(x) = \frac{2x - 1}{x(1-x)}$ (الدالة المشتقة الثانية)

4 ـ إستنتج تغيرات الدالة ϕ'

5 ـ بين أن ϕ' تنعدم عند قيمتين α_1 و α_2 من المجال $]0 ; 1[$

6 ـ إستنتج إشارة ϕ' على المجال $]0 ; 1[$

7 ـ عين $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \phi(x)$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \phi(x)$ و $\phi(1/2)$

8 ـ إستنتج إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0 ; 1[$

9 ــ بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $\phi(x)$ على $]0\,;1[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

10 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0\,;1[$: $0 \le (\ln x)(\ln(1-x)) \le (\ln 2)^2$

الحــل ــ 7

1 ــ نعرف الدالة g بــ : $g(x) = \ln(1-x)$

إذن : g قابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;1[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$

منه : $g'(0) = -1$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 : $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

إذن : $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)-0}{x}$

أي : $-1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

منه : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ و هو المطلوب

لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x\,[\ln(1-x)]}{x}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x \left[\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)(-1)$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ حسب السؤال (1)

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -\ln x$

$= +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

2 ــ ليكن $-1/2 < x < 1/2$ إذن $\begin{cases} -1/2 < -x < 1/2 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 0 < \frac{1}{2} - x < 1 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{cases}$

و لدينا : $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{2} + x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\right]$

من جهة أخرى : $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{2} - x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\right]$

نتيجة : من أجل كل x من $]-1/2\,;1/2[$: $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = 1/2$ هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ــ $\phi'(x) = -\ln(1-x) + \dfrac{-1}{1-x}(1-x) - \left[\ln x + \dfrac{1}{x}(x)\right]$

$= -\ln(1-x) - 1 - \ln x - 1$

$= -[\ln(1-x) + \ln x + 2]$

منه : $\phi''(x) = -\left[\dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{x}\right]$

$$= - \left[\frac{-x+1-x}{x(1-x)} \right]$$

$$= \frac{2x-1}{x(1-x)}$$ و هو المطلوب .

4 ــ تغيرات الدالة ϕ' :

لدينا $\phi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ منه جدول إشارة $\phi''(x)$ كمايلي :

x	0		1/2		1
2 x - 1		-	0	+	
x(1 – x)			+		
$\phi''(x)$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة $\phi'(x)$:

x	0	α_1	1/2	α_2	1
$\phi'(x)$	$+\infty$ ↘	0	$-2(1-\ln 2)$	0 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \phi'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -[\ln(1-x) + \ln x + 2] = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \phi'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} -[\ln(1-x) + \ln x + 2] = +\infty$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\right] = -\left[2\ln\frac{1}{2} + 2\right] = -2[1-\ln 2]$$

5 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة ϕ' نستنتج أن يوجد قيمتين α_1 و α_2

بحيث $\phi'(\alpha_1) = 0$ و $\phi'(\alpha_2) = 0$ لأن $\phi'(1/2) < 0$ إذن المعادلة $\phi'(x) = 0$

تقبل حلا على المجال $]0 ; 1/2[$ و أخر على المجال $]1/2 ; 1[$ أي المعادلة $\phi'(x) = 0$ تقبل حلين α_1 و α_2

6 ــ دائما بملاحظة جدول تغبرات الدالة ϕ' نستنتج مايلي :

x	0		α_1		1/2		α_2		1
$\phi'(x)$		+	0		-		0	+	

7 ــ
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \phi(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1 \ln 1 - x \ln x$$

$= 0 - 0 = 0$ لأن حسب المعطيات نقبل أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{\alpha} \ln x = 0$

أي $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{1} \ln x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \phi(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$$

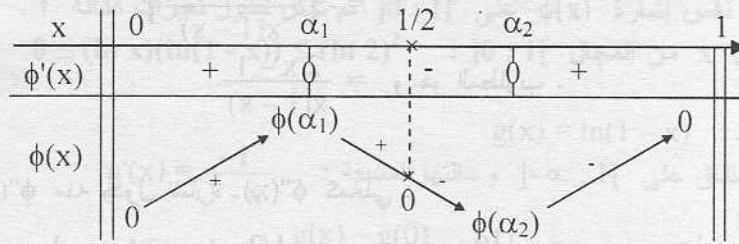
$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y \ln y - 1 \ln 1$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} 1 - x = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y$

$= 0 - 0$

$= 0$

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

8 ــ لإستنتاج جدول إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0 ; 1[$ نقوم أولا

برسم جدول تغيرات الدالة ϕ على المجال $]0 ; 1[$ كما يلي :

منه جدول إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0 ; 1[$ كمايلي :

x	0		1/2		1
$\phi(x)$		+	0	-	

9 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; 1[$ و دالتها المشتقة :

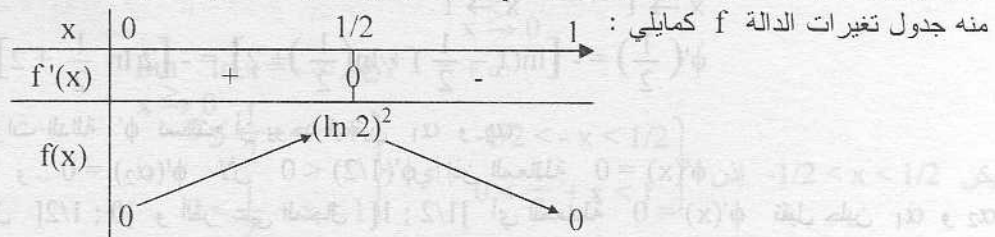
$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x}\right)\ln x$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x)\ln(1-x) - x\ln x}{x(1-x)}$$

$$= \frac{\phi(x)}{x(1-x)}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0 ; 1[$ هي إشارة $\phi(x)$ لأن $x(1-x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$$

10 ــ من جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; 1[$ نستنتج أن:

من أجل كل x من $]0 ; 1[$: $0 \leq f(x) \leq (\ln 2)^2$

أي من أجل كل x من $]0 ; 1[$: $0 \leq (\ln x)(\ln(1-x)) \leq (\ln 2)^2$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 8

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln x$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 1 + \ln x$

2 ــ تحقق أن $g(1) = 0$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 ــ بين أن من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

4 ــ إستنتج إشارة $f'(x)$

5 ــ أدرس نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

6 ــ شكل جدول تغيرات الدالة f

7 ــ أنشئ بدقة المنحنى (C)

الحــل ــ 8

1 ــ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 - 1 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \ln x = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2 ــ $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن $g(1) = 0$ أي الدالة g تنعدم مرة واحدة على $]0 ; +\infty[$ (أنظر جدول التغرات)

منه جدول إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

3 ــ **f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :**

$$f'(x) = \left[\frac{x-(x-1)}{x^2}\right]\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}(x-1)$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ln x + x - 1)$$

$$= \frac{1}{x^2}\, g(x)$$ و هو المطلوب .

4 ــ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

5 ــ

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x-1}{x}\ln x$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{x}\ln x$$

$$= +\infty$$ لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{x} = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x}\ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

$$= +\infty$$

6 ــ **جدول تغيرات الدالة f .**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$ (نفس إشارة $g(x)$)		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$f(1) = \frac{1-1}{1}\ln 1 = 0$$

7 ــ الإنشاء :

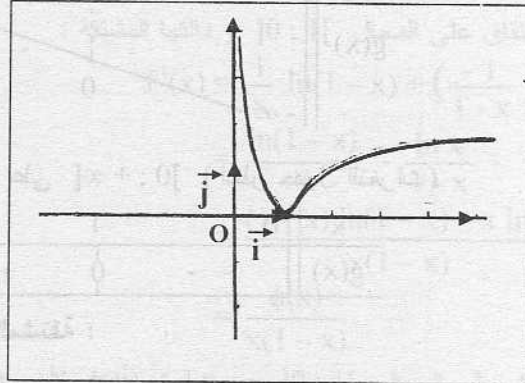
لاحظ أن

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x}\ln x - \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x \left[\frac{x-1}{x} - 1\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x}$$

$= 0$ إذن منحنى الدالة f مقارب لمنحنى الدالة $x \mapsto \ln x$ في جوار $+\infty$

التمرين ــ 9

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

k عدد حقيقي موجب تماما

4 ــ ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$ تحليليا ثم باستعمال منحنى الدالة f .

الحــل ــ 9

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln 1 = 0$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln[e^x(e^x - 1 + e^{-x})]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln e^x + \ln(e^x - 1 + e^{-x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x + \ln(e^x - 1 + e^{-x})$$

$$= +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(2e^x - 1)$ لأن $\frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} > 0$

منه : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1/2$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(1/2)$

$\Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$\ln(3/4)$	↗	$+\infty$

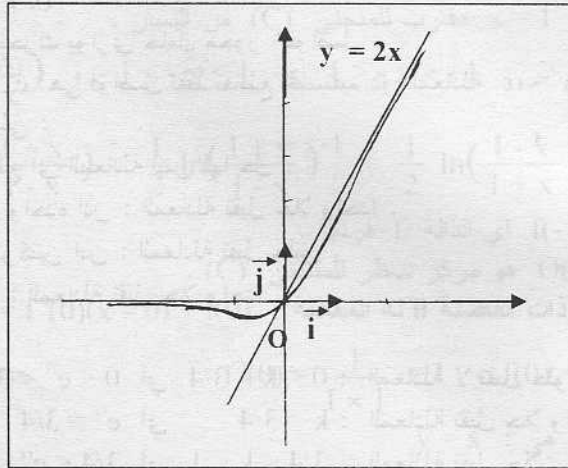
$$f(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{1-2+4}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

2 ـ

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^{2x} - e^{x} + 1) - 2x]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} [\ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x)]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$
$$= \ln 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$$
$$= 0$$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ـ الإنشاء :

4 ـ $k > 0$: $e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0$ ....(α)

طريقة الحل تحليليا : نضع $e^{x} = y$ حيث $y > 0$

إذن : $y^2 - y + 1 - k = 0$ حيث $y > 0$

منه : $\Delta = 1 - 4(1 - k) = 4k - 3$

k	0		3/4		$+\infty$
$\Delta = 4k - 3$		-	0	+	

نتيجة : لما $0 < k < 3/4$: المعادلة لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 3/4$: المعادلة تقبل حلا مضاعفا $y = 1/2$

لما $k > 3/4$: المعادلة تقبل حلان مختلفان هما $y_1 = \frac{1 + \sqrt{4k-3}}{2}$ و $y_2 = \frac{1 - \sqrt{4k-3}}{2}$ > 0

لنبحث عن إشارة الحل y_2 :

لدينا $y_1 \times y_2 = 1 - k$ إذن : إشارة y_2 هي إشارة $(1 - k)$ لأن $y_1 > 0$ كما يلي :

x	0	3/4	1	+∞
1 - k		+	0	-

خلاصة :

لما $0 < k < 3/4$: المعادلة (α) لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 3/4$: المعادلة (α) تقبل حلا مضاعفا x حيث $1/2 = e^x$ أي $x = \ln(1/2)$

لما $3/4 < k < 1$: المعادلة (α) تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $e^{x_1} = y_1$ و $e^{x_2} = y_2$

أي $x_1 = \ln y_1$ و $x_2 = \ln y_2$

لما $k \geq 1$: المعادلة (α) تقبل حلا واحدا x حيث $e^x = y_1$ أي $x = \ln y_1$

طريقة الحل باستعمال منحنى الدالة f :

$$\begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ y = f(x) \\ y = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases}$$

بيانيا : $y = f(x)$ هي معادلة المنحنى (C)

$y = \alpha$ هي معادلة مستقيم متحرك يوازي حامل محور الفواصل

اذن : حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$ هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha$ مع المنحنى (C)

اذن : بملاحظة منحنى الدالة f نستنتج مايلي :

لما $\alpha < \ln(3/4)$: لا يوجد نقط تقاطع أي المعادلة ليس لها حل .

لما $\alpha = \ln 3/4$: يوجد نقطة تقاطع واحدة اذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

لما $\ln 3/4 < \alpha < 0$: يوجد نقطتين مشتركتين اذن : المعادلة تقبل حلين .

لما $\alpha \geq 0$: يوجد نقطة تقاطع واحدة اذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

خلاصة : $\alpha = \ln k \Leftrightarrow k = e^{\alpha}$

لما : $\alpha < \ln(3/4)$ أي $0 < e^{\alpha} < 3/4$ أي $0 < k < 3/4$: المعادلة لا تقبل حلولا

لما : $\alpha = \ln(3/4)$ أي $e^{\alpha} = 3/4$ أي $k = 3/4$: المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا .

لما : $\ln 3/4 < \alpha < 0$ أي $3/4 < e^{\alpha} < e^0$ أي $3/4 < k < 1$: المعادلة تقبل حلان .

لما : $\alpha \geq 0$ أي $e^{\alpha} \geq e^0$ أي $k \geq 1$: المعادلة تقبل حلا واحدا .

التمرين – 10

f دالة معرفة على]1 ; 1-[بـــ $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ نسمي (C) منحناها

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

3 – أثبت أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحنى (C)

4 – أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5 – أنشئ المنحنى (C)

6 – بين أن من أجل كل y من R فإن المعادلة f(x) = y تقبل حلا واحدا يطلب عبارته بدلالة y

7 – نرمز بـــ (C') إلى المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

اشرح لماذا (C) و (C') متناظران بالنسبة الى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الحـل – 10

1 – تغيرات الدالة f : f دالة معرفة على $]-1;1[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{2}\ln y = -\infty$$

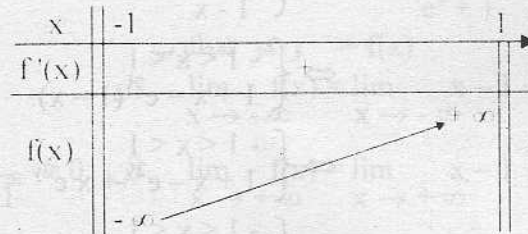
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1-x}\right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2}\ln y = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-1;1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

منه : من أجل كل x من $]-1;1[$ فإن $f'(x) > 0$ لأن $(1-x)(1+x) > 0$

منه : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2 – المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب للمنحنى (C) من اليمين .
المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) من اليسار .

3 – لدينا $-1 < x < 1$ اذن : $1 > -x > -1$ أي $-1 < -x < 1$ و $f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

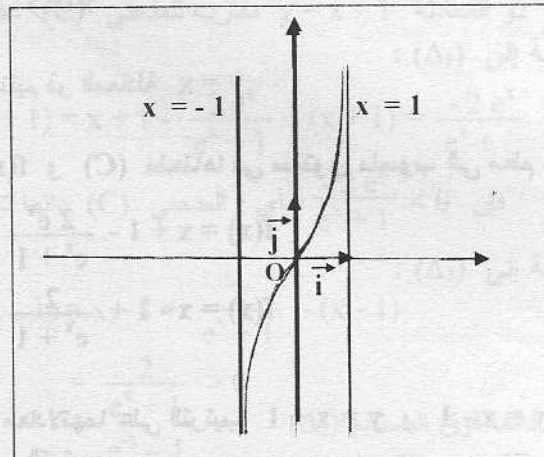
من جهة أخرى : $-f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

إذن : $f(-x) = -f(x)$ أي الدالة f فردية .
منه : المبدأ $O(0;0)$ هو مركز تناظر للمنحنى (C) .

4 – المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ حيث :

$$f'(0) = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس هي : $y = x$

5 – الإنشاء :

6 ـ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال]1 ; 1-[و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$

إذن : المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا على المجال]1 ; 1-[من أجل كل y من IR .

البحث عن عبارة x بدلالة y :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 + x = e^{2y}(1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 + x - e^{2y} + x\,e^{2y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x(1 + e^{2y}) + 1 - e^{2y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \end{cases}$$

نتيجة : $x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ و هي عبارة x بدلالة y .

7 ـ لتكن $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى (C)

إذن : $-1 < x < 1$ و $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

منه النقطة $M'(y ; x)$ تنتمي إلى نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

أي $M'\left(y ; \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\right)$ (حسب السؤال 6)

أي 'M تنتمي إلى منحنى الدالة $x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

أي 'M تنتمي إلى (C')

نتيجة : (C) و (C') متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

التمرين ـ 11

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ـ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 - \frac{2\,e^x}{e^x + 1}$

2 ـ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

3 ـ إستنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

4 ـ بين أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) اللذين معادلاتهما على الترتيب $y = x + 1$ و $y = x - 1$ مقاربان للمنحنى (C) عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

5 ـ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ_1) و (Δ_2)

6 ـ أثبت أن الدالة f فردية .

7 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; 0]$

8 ـ أنشئ بعناية المنحنى (C) على IR

الحـل ـ 11

1 ـ من أجل كل x من IR :

$$x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + \frac{e^x + 1 - 2e^x}{e^x+1} = x + \frac{1-e^x}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$$

و هو المطلوب

2 ـ من أجل كل x من IR :

$$x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x + \frac{-e^x - 1 + 2}{e^x+1} = x + \frac{-e^x+1}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$$

و هو المطلوب

3 ـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$

4 ـ

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x+1)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-2 + \frac{2}{e^x+1}\right] = -2 + \frac{2}{0+1} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

إذن : المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

5 ـ **وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ_1) :**

$$f(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} - (x+1) = \frac{-2e^x}{e^x+1}$$

بما أن $\frac{e^x}{e^x+1} > 0$ فإن $\frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$ أي : المنحنى (C) دائما تحت (Δ_1)

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ_2) :

$$f(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x-1) = \frac{2}{e^x+1} > 0$$

إذن : المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (Δ_2)

6 ـ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)}$$

$$= -x - \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

$$= -x + \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$= -\left[x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right]$$

$$= -f(x)$$

إذن : f دالة فردية .

7 ــ تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

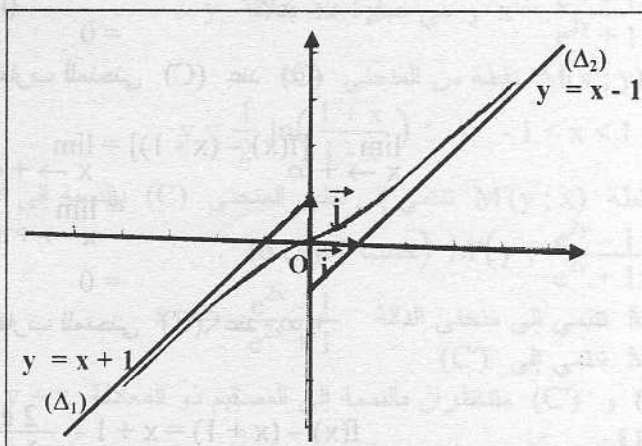
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

8 ــ الإنشاء :

<u>التمرين ــ 12</u>

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على IR و تحققان الشروط التالية :

(1) من أجل كل عدد حقيقي x : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = g'(x)$

(3) $f(0) = 1$

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \neq 0$

2 ــ أحسب $g(0)$

3 ــ باستعمال الشرط (1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = f'(x)$

نضع $u = f + g$ و $v = f - g$

4 ــ أحسب $u(0)$ ؛ $v(0)$

5 ــ بين أن $u' = u$ و $v' = -v$
6 ــ عين الدالتين u و v
7 ــ إستنتج عبارتي $f(x)$ و $g(x)$

الحل ــ 12

1 ــ من أجل كل x من IR : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$
أي : $[f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2$
أي : $f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x)]^2 = 0$
$\Leftrightarrow 1 + [g(x)]^2 = 0$
لكن من أجل كل x من IR فإن $[g(x)]^2 \geq 0$
إذن : $1 + [g(x)]^2 \geq 1$
منه : $1 + [g(x)]^2 > 0$
أي : $f(x) \neq 0$ و هو المطلوب .

2 ــ لدينا : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$
إذن : $[g(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1$
أي : $[g(0)]^2 = [f(0)]^2 - 1$
أي : $[g(0)]^2 = 1 - 1$
أي : $[g(0)]^2 = 0$ منه $g(0) = 0$

3 ــ لدينا : $[f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2$ منه باشتقاق الطرفين :
$2\,f'(x) . f(x) = 0 + 2\,g'(x) . g(x)$
أي : $2\,f'(x) . f(x) = 2\,g(x) . f(x)$ لأن حسب الشرط (2) $f(x) = g'(x)$
أي : $f'(x) = g(x)$ بقسمة الطرفين على $2\,f(x)$ لأن $f(x) \neq 0$
منه : $g(x) = f'(x)$ و هو المطلوب

4 ــ $u(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$
$v(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$

5 ــ $u = f + g$ منه : $u' = f' + g'$
أي : $u' = g + f$ لأن : $f' = g$ و $g' = f$
أي : $u' = u$ و هو المطلوب
$v = f - g$ منه : $v' = f' - g'$
أي : $v' = g - f$ لأن : $f' = g$ و $g' = f$
أي : $v' = -(f - g)$
أي : $v' = -v$ و هو المطلوب

6 ــ $u' = u$ معادلة تفاضلية ذات المجهول u من الشكل $y' = a\,y$ حيث
$a = 1$ منه $u = c\,e^x$ حيث c ثابت حقيقي .
$v' = -v$ معادلة تفاضلية ذات المجهول v من الشكل $y' = a\,y$ حيث
$a = -1$ منه $v = \alpha\,e^{-x}$ حيث α ثابت حقيقي .

نتيجة : $u : x \longmapsto c\,e^x$ و $v : x \longmapsto \alpha\,e^{-x}$

7 ــ $\begin{cases} u(x) = f(x) + g(x) \\ v(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u(x) + v(x) = 2\,f(x) \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\,[u(x) + v(x)] \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{c}{2}\,e^x + \dfrac{\alpha}{2}\,e^{-x} \\ g(x) = c\,e^x - \dfrac{c}{2}\,e^x - \dfrac{\alpha}{2}\,e^{-x} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \frac{c}{2} e^{x} + \frac{\alpha}{2} e^{-x} \\ g(x) = \frac{c}{2} e^{x} - \frac{\alpha}{2} e^{-x} \end{cases}$ حيث c و α عددين حقيقيين يطلب تعيينهما .

البحث عن c و α :

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow c + \alpha = 2 \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow \frac{c}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow c - \alpha = 0 \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نحصل على: $2c = 2$ أي $c = 1$

بالتعويض في (1) نحصل على $\alpha = 2 - c$ أي $\alpha = 1$

نتيجة : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x} \\ g(x) = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x} \end{cases}$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 13

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس نهاية f عند $+\infty$

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C)

3 ــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

4 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

5 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) > 0$

6 ــ أحسب $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

7 ــ أنشئ المنحنى (C) على المجال $[0 ; +\infty[$

8 ــ عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D)

الحــل ــ 13

ــ 1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - e^{-x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - 0) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$= +\infty$$

ــ 2

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - e^{-x}) - 2x + 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x - x e^{-x} - 2 + e^{-x} - 2x + 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x e^{-x} + e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x e^{-x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln(e^{x})}{e^{x}} \quad \text{لأن} \quad x = \ln e^{x}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{x} = \lim_{y \to +\infty} y$$

$$= 0$$

منه : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (D) :

$$f(x) - (2x - 2) = -x e^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

منه : إشارة $f(x) - (2x - 2)$ هي إشارة $(1 - x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
1 - x		+	0	-	

نتيجة :

لما $0 \leq x < 1$: المنحنى (C) فوق (D)

لما $x = 1$: المنحنى (C) يقطع (D)

لما $x > 1$: المنحنى (C) تحت (D)

4 ــ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (+e^{-x})(x - 1)$$
$$= 2 - e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x}$$
$$= 2 - 2e^{-x} + x e^{-x}$$
$$= x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$ و هو المطلوب .

5 ــ لدينا مايلي :

$x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$\Rightarrow e^{-x} < e^{0}$

$\Rightarrow e^{-x} < 1$

$\Rightarrow -e^{-x} > -1$

$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 1 - 1$

$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$

$\Rightarrow 2(1 - e^{-x}) > 0$

$\Rightarrow x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0$ لأن $x e^{-x} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ و هو المطلوب .

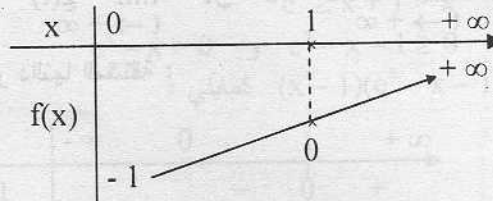
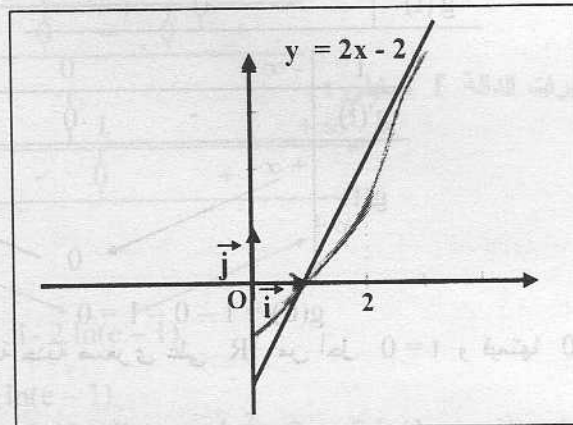
6 ــ $f'(0) = 0 + 2(1 - 1) = 0$

منه إشارة $f'(x)$ على $]0 ; +\infty[$:

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	

إذن : جدول تغيرات الدالة f :

$f(0) = (-1)(2 - 1) = -1$

7 ــ الإنشاء :

8 ــ يكون المماس عند النقطة A ذات الفاصلة x موازيا للمستقيم (D) إذا و فقط إذا كان ميله 2 أي $f'(x) = 2$ كما يلي :

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2 - 2e^{-x} + xe^{-x} = 2$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

إذن : النقطة المطلوبة هي $A(2\,;f(2))$

$f(2) = (2-1)(2-e^{-2}) = 2 - e^{-2}$ إذن : $A(2\,;2-e^{-2})$

التمرين ـــ 14

1 أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على IR بـــ $g(t) = e^t - t - 1$

2 ـــ ماهي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR ؟

3 ـــ إستنتج أن : من أجل كل عدد حقيقي t : $e^t \geq t + 1$ و $e^t > t$

لتكن f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

4 ـــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$

5 ـــ نقبل أن $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

6 ـــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

7 ـــ شكل جدول تغيرات الدالة f (نقبل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$)

في معلم متعامد و متجانس نعتبر القطع المكافئ (p) ذو المعادلة $y = x^2 - 2x$ و (C) منحنى الدالة f

8 ـــ بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$ ماذا تستنتج بالنسبة لـــ (C) و (p)

9 ـــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (p)

10 ـــ عين معادلة لكل من (D_1) و (D_2) مماسي المنحنيين (p) و (C) على الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

11 ـــ أرسم كل من (C) و (p) في نفس المعلم .

الحـــل ـــ 14

1 ـــ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t - t - 1 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^t(1 - te^{-t} - e^{-t}) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$

الدالة g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(t) = e^t - 1$$

منه : $g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1$

$\Leftrightarrow t \geq \ln 1$

$\Leftrightarrow t \geq 0$ منه جدول إشارة $g'(t)$:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(t)		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة g:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(t)		-	0	+	
g(t)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

2 ـــ من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على IR من أجل $t = 0$ و قيمتها 0

أي : من أجل كل t من IR فإن : $g(t) \geq 0$

3 ـــ حسب السؤال (2) من أجل كل t من IR : $g(t) \geq 0$

أي : $e^t - t - 1 \geq 0$

منه : $e^t \geq t + 1$ و هو المطلوب .

من جهة أخرى $e^t > t$ إذن $e^t \geq t+1 > t$: إذن $t+1 > t$

نتيجة : من أجل كل t من IR : $e^t \geq t+1 > t$

4 – $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$
$= x^2 - 2\ln[e^x(1 - x e^{-x})]$
$= x^2 - 2[\ln e^x + \ln(1 - x e^{-x})]$
$= x^2 - 2[x + \ln(1 - x e^{-x})]$
$= x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$ و هو المطلوب

5 – $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 2\ln(1)$ لأن $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

$= +\infty$

6 – f دالة قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x - 2\left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right)$$
$$= \frac{2x(e^x - x) - 2(e^x - 1)}{e^x - x}$$
$$= \frac{2x e^x - 2x^2 - 2e^x + 2}{e^x - x}$$
$$= \frac{2(x e^x - e^x - x^2 + 1)}{e^x - x}$$
$$= \frac{2[e^x(x-1) - (x^2 - 1)]}{e^x - x}$$
$$= \frac{2[e^x(x-1) - (x-1)(x+1)]}{e^x - x}$$
$$= \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$ وهو المطلوب .

7 – لاحظ أن : حسب السؤال (3) : $e^x \geq x + 1 > x$

أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ و $e^x - x > 0$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)(e^x - x - 1)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - x - 1$		$+$	0	$+$		$+$	
الجداء		$-$	0	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$1 - 2\ln(e-1)$	↗	$+\infty$

$f(1) = 1 - 2\ln(e - 1)$

8 – $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x^2 - 2x)] = \lim_{x \to +\infty} [x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x}) - (x^2 - 2x)]$

$= \lim_{x \to +\infty} -2\ln(1 - x e^{-x})$

$$= \lim_{x \to +\infty} - 2\ln(1) \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$= 0$$

إذن : المنحنيان (C) و (p) متقاربان عند $+\infty$

9 ـ الوضعية النسبية لـ (C) و (p) :

لدينا :
$$f(x) - (x^2 - 2x) = -2\ln(1 - x e^{-x})$$
$$= \ln(1 - x e^{-x})^{-2}$$
$$= \ln\left(\frac{1}{1 - x e^{-x}}\right)^2$$
$$= \ln\left[\frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}\right]^2$$
$$= \ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)^2$$
$$= 2\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)$$

من إشارة $\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)$ كمايلي :

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - x} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq e^x - x \quad \text{لأن} \quad e^x > 0 \quad \text{و} \quad e^x - x > 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \geq -x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x^2 - 2x)$	$-$	0	$+$

نتيجة : لما $x < 0$: المنحنى (C) تحت القطع المكافئ (p)

لما $x = 0$: المنحنى (C) يقطع القطع المكافئ (p)

لما $x > 0$: المنحنى (C) فوق القطع المكافئ (p)

10 ـ معادلة المماس (D_2) للمنحنى (C) عند النقطة $A(0\,;0)$ هي : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$ إذن : $y = 0$

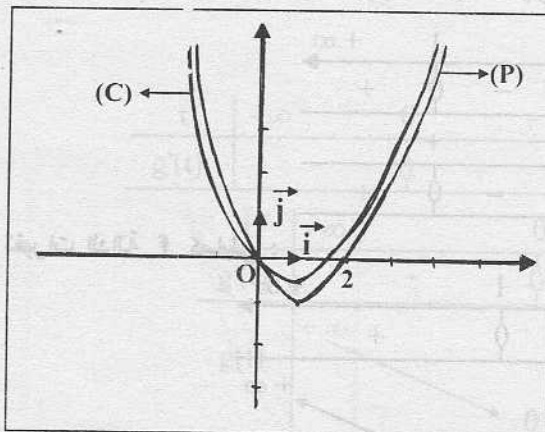
معادلة المماس (D_1) للمنحنى (p) عند النقطة $A(0\,;0)$ هي : $y = \phi'(0)x + \phi(0)$

حيث ϕ هي الدالة $x \longmapsto x^2 - 2x$

منه : $\phi'(x) = 2x - 2$

أي : $\phi'(0) = -2$

إذن : معادلة (D_1) هي : $y = -2x$

11 ـ الإنشاء :

التمرين ـ 15

f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ و (Γ) منحناها البياني

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

لتكن **g** دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $g(x) = e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي **x** من المجال $[0\,;+\infty[$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2 ـ إستنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 ـ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (Γ) و (C)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بـ $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

4 ـ بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول .

5 ـ إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) و أدرس تقاربها .

6 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right]$$

7 ـ أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $\pi/2$

الحـل ـ 15

1 ـ من أجل كل x من $[0\,;+\infty[$ فإن : $\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ -1 \leq \cos 4x \leq 1 \end{cases}$

منه : $-e^{-x} \leq e^{-x}\cos 4x \leq e^{-x}$

أي : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ و هو المطلوب .

2 ـ لدينا $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$

إذن : حسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3 ـ تقاطع (Γ) و (C) :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow e^{-x}\cos 4x = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos(0) \\ (x \geq 0 \text{ لأن } k \in IN) &\Leftrightarrow 4x = 2\pi k : k \in IN \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k \end{aligned}$$

إذن : (Γ) و (C) يتقاطعان في مجموعة غير منتهية من النقط

فواصلها من الشكل $x = \frac{1}{2}k$ ، حيث $k \in IN$ لأن $(x \geq 0)$

4 ـ لدينا من أجل كل $n \in IN$:

$$\begin{aligned} u_n &= f\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{-n\pi/2}\cos\left(4 \times n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{-n\pi/2}\cos(2\pi n) \\ &= \left(\frac{1}{e^{\pi/2}}\right)^n \quad \text{لأن } \cos 2\pi n = 1 \end{aligned}$$

منه : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e^{\pi/2}}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

5 ـ لدينا : أساس المتتالية (u_n) هو $0 < \frac{1}{e^{\pi/2}} < 1$ و حدها الأول $u_0 = 1$ أي $u_0 > 0$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 0 أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

6 ـ f قابلة للاشتقاق على $[0\,;+\infty[$ و من أجل كل x من $[0\,;+\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\cos 4x - (4\sin 4x)\,e^{-x} \\ &= -e^{-x}\left[\cos 4x + 4\sin 4x\right] \end{aligned}$$

و هو المطلوب

7 ـ معامل توجيه مماس المنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $\pi/2$ هو :

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -e^{-\pi/2}\left[\cos 4\frac{\pi}{2} + 4\sin 4\frac{\pi}{2}\right] \\ &= -e^{-\pi/2}\left[\cos 2\pi + 4\sin 2\pi\right] \\ &= -e^{-\pi/2} \\ &= \frac{-1}{e^{\pi/2}} \\ &\approx -0{,}2 \end{aligned}$$

باستعمال الحاسبة .

التمرين ـ 16

الجزء I

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (إستعمل $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha}$) فسر هندسيا .

2 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3 ـ أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على IR

4 ـ شكل جدول تغيرات الدالة f

5 ـ عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المنحنى (C) بحامل محور الفواصل .

6 ـ إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل $x \in IR$

الجزء II

1 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $f''(x) = 4(2x - 3)e^{-2x}$ حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f

2 ـ حل في IR المعادلة $f''(x) = 0$

3 ـ لتكن B النقطة من المنحنى (C) التي فاصلتها 1/2 . عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند B

نريد دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) لذلك نعرف الدالة g على IR كمايلي :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

4 ـ عين $g'(x)$ ثم $g''(x)$

5 ـ أدرس إشارة $g''(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة g' على IR

6 ـ إستنتج إشارة $g'(x)$ ثم إتجاه تغير الدالة g على IR

7 ـ عين إشارة $g(x)$ على IR ثم إستنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس (T)

8 ـ أنشئ بعناية المنحنى (C) و المماس (T)

الحـل ـ 16

1 ـ
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 1)e^{-2x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2xe^{-2x} - e^{-2x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2xe^{-2x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$$
$$= \lim_{x \to +\infty} -(-2xe^{-2x})$$
$$= \lim_{\alpha \to -\infty} -\alpha e^{\alpha} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} -2x = \lim_{\alpha \to -\infty} \alpha$$
$$= 0 \quad \left(\text{لأن} \quad \lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha} = 0\right)$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2 ـ
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x - 1)e^{-2x}$$
$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty \end{cases}$$

3 ـ f دالة قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x - 1)$$
$$= 4e^{-2x} - 4xe^{-2x}$$
$$= 4e^{-2x}(1 - x)$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1 - x)$ لأن $4e^{-2x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1 - x	+	0	-

4 ـــ منه جدول تغيرات f :

$$f(1) = (2-1)\,e^{-2} = (1/e)^2$$

5 ـــ $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\,e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/2$

منه : (C) يقطع محور الفواصل في النقطة $A(1/2\,;\,0)$

6 ـــ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن إشارة f(x) كمايلي :

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
f(x)	-	0	+

الجزء II

1 ـــ من أجل كل x من IR لدينا : $f'(x) = 4\,e^{-2x}(1-x)$

منه من أجل كل x من IR فإن : $f''(x) = 4[-2\,e^{-2x}(1-x) - e^{-2x}]$

أي : $f''(x) = 4(-2\,e^{-2x} + 2x\,e^{-2x} - e^{-2x})$

أي : $f''(x) = 4\,e^{-2x}(2x-3)$ و هو المطلوب

2 ـــ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\,e^{-2x}(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3/2$

3 ـــ **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب من الشكل** $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

حيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e}$

منه المعادلة هي : $y = \frac{2}{e}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ أي $(T) : \; y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$

4 ـــ $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$

منه : $g'(x) = f'(x) - \frac{2}{e}$

منه : $g''(x) = f''(x) = 4\,e^{-2x}(2x-3)$

5 ـــ **إشارة $g''(x)$ هي إشارة $(2x-3)$ لأن $4\,e^{-2x} > 0$ كمايلي :**

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
2 x - 3	-	0	+

منه :

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
g''(x)	-	0	+

إذن : g' متناقصة على المجال $]-\infty\,;\,3/2]$

g' متزايدة على المجال $[3/2\,;\,+\infty[$

g' تقبل قيمة حدية صغرى على IR عند $x = 3/2$ و قيمتها :

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = 4e^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = -2e^{-3} - 2e^{-1} = -2(e^{-3} + e^{-1})$$

منه جدول تغيرات الدالة g' كمايلي :

x	$-\infty$		α_1		$3/2$		$+\infty$
$g''(x)$		-		-	0	+	
$g'(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-2(e^{-3}+e^{-1})$	↗	$-2/e$

$$\lim_{x \to -\infty} g'(x) = \lim_{x \to -\infty} f'(x) - \frac{2}{e}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 4e^{-2x}(1 - x) - \frac{2}{e}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} 4e^{-2x}(1 - x) - \frac{2}{e}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4e^{-2x} + 2(-2xe^{-2x}) - \frac{2}{e}$$

$= -\frac{2}{e}$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} -2xe^{-2x} = 0$

لاحظ أن $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e}$: إذن $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e} = 0$ منه : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$

6 ــ إذن : حسب جدول تغيرات الدالة g' نستنتج إشارة $g'(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x - 1)e^{-2x} - \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-2x}\left(2x - 1 - \frac{2}{e}xe^{2x} - \frac{1}{e}e^{2x}\right)$$

$\lim_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ لأن $= \lim_{x \to -\infty} e^{-2x}(2x - 1)$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ لأن $= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{e}x + \frac{1}{2}$

$= -\infty$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{2}{e} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right] = 0 - 0 = 0$$

7 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$-$

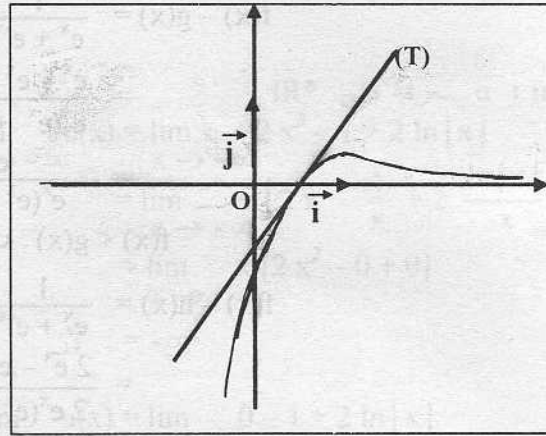
لدينا : $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$

منه : إشارة $f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{2}\right)$ هي إشارة $g(x)$

إذن : لما $x = 1/2$ المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in IR - \{1/2\}$ المنحنى (C) يقع تحت المماس (T)

8 ـ الإنشاء :

التمرين ـ 17

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس

1 ـ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 ـ بين أن من اجل كل عدد حقيقي موجب x فإن $e^{-x} \leq e^x$

3 ـ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

4 ـ أدرس تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

5 ـ نعتبر الدالتين g و h المعرفتان على IR بـ $g(x) = \frac{1}{e^x}$ و $h(x) = \frac{1}{2e^x}$

بين أن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ $h(x) \leq f(x) < g(x)$

6 ـ أنشئ المنحنى (C)

الحـل ـ 17

1 ـ ليكن $x \in IR$ إذن : $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$

منه : الدالة f زوجية .

إذن : المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .

2 ـ لدينا $x \geq 0$ إذن : $-x \leq 0$

منه : $-x \leq x$

منه : $e^{-x} \leq e^x$ لأن الدالة exp متزايدة .

3 ـ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

4 ـ التغيرات : f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(e^x - e^{-x})$ - لأن المقام موجب (على المجال $[0 ; +\infty[$)

لكن حسب السؤال (2) : من أجل $x \geq 0$ فإن $e^x \geq e^{-x}$ منه $e^x - e^{-x} \geq 0$ أي $-(e^x - e^{-x}) \leq 0$

إذن : إشارة $-(e^x - e^{-x})$ - كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-(e^x - e^{-x})$		بالتناظر +	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f على IR كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

5 ـ ليكن $x \in [0 ; +\infty[$:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{e^x - e^x - e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})}$$

$$= -\frac{e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})} < 0$$

إذن : $f(x) - g(x) < 0$ منه $f(x) < g(x)$

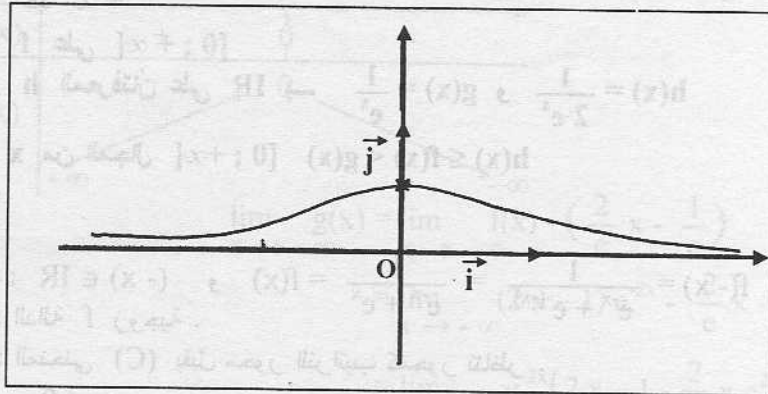
$$f(x) - h(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{2e^x}$$

$$= \frac{2e^x - e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})} \geq 0$$ حسب السؤال (2) (على المجال $[0 ; +\infty[$)

إذن : $f(x) - h(x) \geq 0$ منه $f(x) \geq h(x)$

نتيجة : من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$: $h(x) \leq f(x) < g(x)$

6 ـ الإنشاء :

التمرين ـ 18

الجزء I

u دالة معرفة على *IR بـ $u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة u على *IR

2 ـ بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1/2 ; 1[$

3 ـ إستنتج إشارة $u(x)$ على *IR

الجزء II

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (نقبل أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

و $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 0\right)$

2 — أدرس تغيرات الدالة f

3 — بين أن $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$

4 — باستعمال حصر α في السؤال (2) أثبت أن $-0,5 < f(\alpha) < 2,5$

الجزء III

لتكن $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ نقطتين من المستوي حيث M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب

1 — عين x' و y' بدلالة x و y

2 — بين أن إذا كانت M تتغير على المنحنى (C) فإن النقطة M' تتغير على المنحنى (γ) الذي معادلته

$$y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$$

3 — أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (γ)

الحل — 18

الجزء I

1 — تغيرات الدالة u : u معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left[2x^2 - \frac{1}{x} + 2\frac{\ln|x|}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\,[2x^2 - 0 + 0]$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} 0 - 1 + 2\ln|x|$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 + 2\ln|x| = +\infty$$

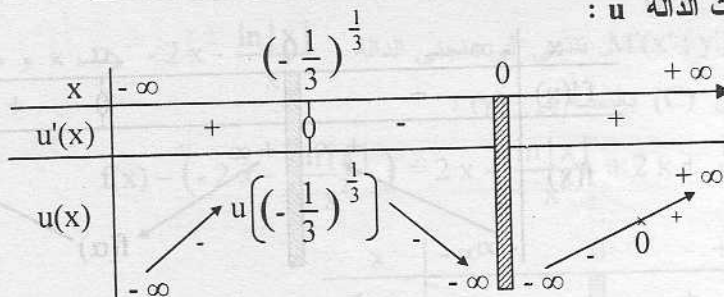
الدالة u قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$u'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} = \frac{6x^3 + 2}{x} = \frac{2(3x^3 + 1)}{x}$$

منه إشارة $u'(x)$:

x	$-\infty$		$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
$3x^3 + 1$		-	0	+		+	
x		-		-	0	+	
$\frac{2(3x^3+1)}{x}$		+	0	-	||	+	

منه جدول تغيرات الدالة u :

x	$-\infty$		$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	||	+	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$u\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

$$u\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{3} - \frac{2}{3}\ln 3 = -\frac{1}{3}(5 + 2\ln 3) < 0$$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة u نستنتج أن الدالة u تنعدم مرة واحدة على المجال $]0 ; +\infty[$ و عليه فالمعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0 ; +\infty[$

من جهة أخرى : $u(1) = 2 - 1 + 2\ln 1 = 1 > 0$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - 1 + 2\ln\frac{1}{2} = -\frac{6}{8} - 2\ln 2 < 0$$

إذن : u مستمرة على المجال $[1/2 ; 1]$ و $u(1/2) \times u(1) < 0$

منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا α على المجال $]1/2 ; 1[$

بما أن u متزايدة تماما على $]1/2 ; 1[$ فإن α و حيد .

3 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة u نستنتج إشارة $u(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		1/2		α		1	$+\infty$
$u(x)$		-	‖	-			0	+		

الجزء II

1 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 - \frac{\ln|x|}{x^2} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} -\ln|x| = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$

2 ــ **تغيرات الدالة f :** f قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x\ln|x|}{x^4}$$

$$= \frac{2x^4 - (x - 2x\ln|x|)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^4 - x + 2x\ln|x|}{x^4}$$

$$= \frac{x(2x^3 - 1 + 2\ln|x|)}{x^4}$$

$$= \frac{x\,u(x)}{x^4}$$

منه : إشارة $f'(x)$ على IR^* هي إشارة $x\,u(x)$ كمايلي :

x		0		α	$+\infty$
x	-	‖	+		
$u(x)$	-	‖	-	0	+
$f'(x)$	+	‖	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3 ــ لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$ .... (1) حيث $u(\alpha) = 0$

إذن : $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 1 + 2\ln|\alpha| = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln|\alpha| = 1 - 2\alpha^3$

$\Leftrightarrow \ln|\alpha| = \frac{1-2\alpha^3}{2}$

بالتعويض في (1) :

$$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\frac{1-2\alpha^3}{2}}{\alpha^2}$$

$$= 2\alpha - \frac{1-2\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$= 2\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$= 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$$ و هو المطلوب

4 ــ لدينا : $1/2 < \alpha < 1$ إذن : $3/2 < 3\alpha < 3$ .... (1)

و $1/2 < \alpha < 1$ إذن : $1/4 < \alpha^2 < 1$

منه : $1/2 < 2\alpha^2 < 2$

منه : $1/2 < \frac{1}{2\alpha^2} < 2$

منه : $-2 < \frac{-1}{2\alpha^2} < -\frac{1}{2}$ ....(2)

بجمع المتباينتان (1) و (2) طرف لــ طرف نحصل على : $\frac{3}{2} - 2 < 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} < 3 - \frac{1}{2}$

أي : $\frac{-1}{2} < 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{5}{2}$

أي : $-0,5 < f(\alpha) < 2,5$

الجزء III

$M(x ; y)$ ؛ $M'(x' ; y')$

1 ــ تكون M' نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب إذا و فقط إذا كان : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

2 ــ M تتغير على المنحنى (C) إذن : $y = f(x)$

أي : $y = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$

منه : $y' = y \Leftrightarrow y' = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$

$\Leftrightarrow y' = -2(-x) - \frac{\ln|-x|}{(-x)^2}$

$\Leftrightarrow y' = -2x' - \frac{\ln|x'|}{(x')^2}$ لأن $x' = -x$

منه : النقطة $M'(x' ; y')$ تنتمي إلى منحنى الدالة $x \longmapsto -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ و هو المطلوب .

3 ــ وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (γ) :

$$f(x) - \left(-2x - \frac{\ln|x|}{x^2}\right) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} + 2x + \frac{\ln|x|}{x^2} = 4x$$

منه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
4 x	-	‖	+

لما $x \in]-\infty ; 0[$: المنحنى (C) تحت المنحنى (γ) .

لما $x \in]0 ; +\infty[$: المنحنى (C) فوق المنحنى (γ) .

التمرين ــ 19

الجزء I : f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس شفعية الدالة f . فسر هندسيا النتيجة

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

3 ــ ارسم المنحنى (C) على IR

الجزء II : لتكن $A(1 ; 0)$ نقطة من المستوي و $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى (C)

1 ــ عين بدلالة x المسافة AM

نعرف الدالة g على IR بـ $g(x) = (x-1)^2 + \dfrac{(e^x - e^{-x})}{4}$

2 ــ أحسب $g'(x)$

3 ــ أحسب $g''(x)$ حيث g'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة g .

4 ــ بين أن : من أجل كل x من IR : $g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

5 ــ إستنتج تغيرات الدالة g' على IR

6 ــ بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; 1]$ يحقق $g'(\alpha) = 0$

7 ــ تحقق أن $0,46 < \alpha < 0,47$

8 ــ عين إشارة $g'(x)$ على IR

9 ــ أدرس تغيرات الدالة g على IR (لا يطلب حساب النهايات)

10 ــ ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR

نقبل أن المسافة AM تكون أصغر ما يمكن عند النقطة M_α من المنحنى (C) و التي فاصلتها α .

11 ــ مثل النقطة M_α في الشكل .

12 ــ بين أن : $\alpha - 1 = -\dfrac{1}{2} f(2\alpha)$ ثم $g(\alpha) = \dfrac{1}{4}[f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$

13 ــ إستنتج حصرا للعدد $g(\alpha)$ ثم للمسافة AM_α

الحـل ــ 19

الجزء I :

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \dfrac{-(e^{x} - e^{-x})}{2}$

أي : $f(-x) = -f(x)$

منه : f دالة فردية

إذن : المبدأ $O(0 ; 0)$ هو مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C)

2 ــ تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

الدالة f قابلة للا شتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[e^x - (-e^{-x})\right] = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه جدول تغيرات الدالة f على IR :

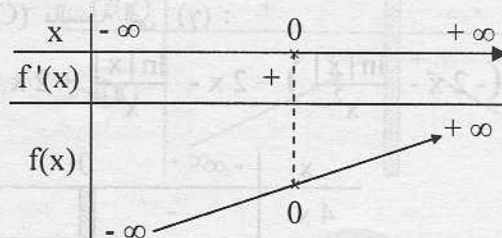
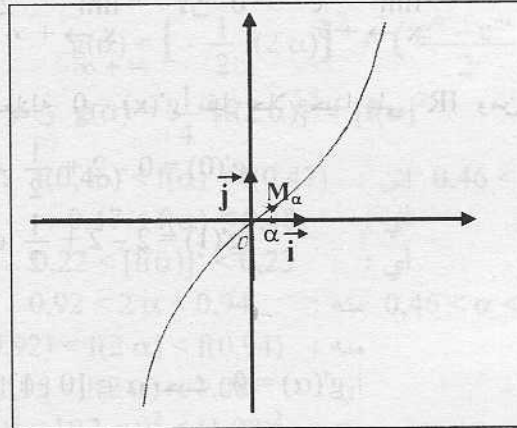
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3 ـ الإنشاء :

الجزء II :

1 ـ لدينا $A(1 ; 0)$

و $M(x ; y)$

لكن $M \in (C)$ إذن : $y = f(x)$ أي $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

منه : $M\left(x ; \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

إذن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ له المركبات : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{pmatrix}$

منه : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}$

أي : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}$ و هي المسافة المطلوبة .

2 ـ $g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$

إذن : $g'(x) = 2(x-1) + \frac{1}{4}\,[2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})]$

$= 2x - 2 + \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$

$= 2x - 2 + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

3 ـ $g''(x) = 2 + \frac{1}{2}(2e^{2x}) - \frac{1}{2}(-2e^{-2x})$

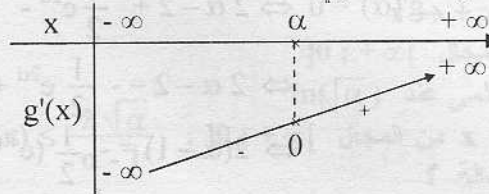
4 ـ أي $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$ و هو المطلوب .

5 ـ لدينا : $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$ إذن : $g''(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه : الدالة g' متزايدة تماما على IR كمايلي :

$$\lim_{x \to -\infty} g'(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2x - 2 - \frac{1}{2}e^{-2x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0 \text{ لأن } = \lim_{x\to+\infty} 2x-2+\frac{1}{2}e^{2x} = +\infty$$

6 ـ من جدول تغيرات الدالة g' نستنتج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على IR ومن جهة أخرى لدينا :

$$g'(0)=0-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

$$g'(1)=2-2+\frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{-2}=\frac{1}{2}(e^{2}-e^{-2})$$

نتيجة : g' مستمرة على $[0\,;1]$ و $g'(0)\times g'(1)<0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $\alpha\in[0\,;1]$ حيث $g'(\alpha)=0$

7 ـ لنتحقق أن $0{,}46<\alpha<0{,}47$

$$g'(0{,}46)=2(0{,}46)-2+\frac{1}{2}e^{2(0{,}46)}-\frac{1}{2}e^{-2(0{,}46)}=-0{,}02$$

$$g'(0{,}47)=2(0{,}47)-2+\frac{1}{2}e^{2(0{,}47)}-\frac{1}{2}e^{-2(0{,}47)}=0{,}01$$

نتيجة : g' مستمرة على $[0{,}46\,;0{,}47]$ و $g'(0{,}46)\times g'(0{,}47)<0$ إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد $\beta\in[0{,}46\,;0{,}47]$ حيث $g'(\beta)=0$

بما أن α وحيد فإن $\beta=\alpha$ و هو المطلوب

8 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g' نستنتج إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$ 0,46 α 0,47 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$

9 ـ حسب جدول إشارة $g'(x)$ فإن : g : متناقصة على المجال $]-\infty\,;\alpha[$ و g : متزايدة على المجال $]\alpha\,;+\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	$-\infty$ 0,46 α 0,47 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	↘ $g(\alpha)$ ↗

10 ـ من جدول تغيرات الدالة g فإن القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR هي $g(\alpha)$

11 ـ أنظر الرسم لتمثيل النقطة M_α

12 ـ

$$g'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\alpha-2+\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{2}e^{-2\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha-2=-\frac{1}{2}e^{2\alpha}+\frac{1}{2}e^{-2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)=-\frac{1}{2}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=-\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1=-\frac{1}{2}f(2\alpha)$$ و هو المطلوب

منه جهة أخرى : $$g(\alpha)=(\alpha-1)^2+\frac{1}{4}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})^2$$

أي : $g(\alpha) = \left[-\frac{1}{2} f(2\alpha)\right]^2 + \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right)^2$

أي : $g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$ و هو المطلوب

13 ـ الحصر : $0,46 < \alpha < 0,47$ إذن : $f(0,46) < f(\alpha) < f(0,47)$ لأن f متزايدة على $[0,46 ; 0,47]$

أي : $0,47 < f(\alpha) < 0,48$

أي : $0,22 < [f(\alpha)]^2 < 0,23$ ....(1)

منه جهة أخرى : $0,46 < \alpha < 0,47$ منه : $0,92 < 2\alpha < 0,94$

منه : $f(0,92) < f(2\alpha) < f(0,94)$

أي : $1,05 < f(2\alpha) < 1,08$

منه : $(1,05)^2 < [f(2\alpha)]^2 < (1,08)^2$

أي : $1,10 < [f(2\alpha)]^2 < 1,16$

منه : $0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 < 0,29$ .... (2)

بجمع (1) و (2) نحصل على : $0,22 + 0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2 < 0,29 + 0,23$

أي : $0,49 < g(\alpha) < 0,52$

بما أن $AM = \sqrt{g(x)}$ فإن $AM_\alpha = \sqrt{g(\alpha)}$

أي : $\sqrt{0,49} < AM_\alpha < \sqrt{0,52}$ أي $0,7 < AM_\alpha < 0,72$

(هذه المسافة مقدرة بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم)

التمرين ـ 20

لتكن f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

الجزء I :

1 أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

2 ـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α من المجال $[e + 1 ; e^3 + 1]$

ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1 ; +\infty[$

لتكن ϕ الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ $\phi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

3 ـ بين أن إشارة $\phi'(x)$ هي إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1 ; +\infty[$

4 ـ بين أن ϕ متزايدة على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}[$ و متناقصة على المجال $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

الجزء III :

1 ـ تحقق أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f(x) = \phi(e^x)$

2 ـ إستنتج $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

4 ـ أثبت أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $\ln(\sqrt{\alpha})$

5 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

6 ـ أنشئ المنحنى (C) الممثل للدالة f

الحل ـ 20

الجزء I :

1 ـ تغيرات الدالة g حيث $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

g معرفة على $]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 2 - y \ln y \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y$$

$\lim_{y \overset{>}{\to} 0} y \ln y = 0$ لأن $= 2$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x-1)\left[\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1)\right]$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$ لأن $= \lim_{x \to +\infty} (x-1)[2 - \ln(x-1)]$

$\lim_{x \to +\infty} -\ln(x-1) = -\infty$ لأن $= -\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 2 - \left[\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1)\right]$$
$$= 2 - [\ln(x-1) + 1]$$
$$= 1 - \ln(x-1)$$

إشارة $g'(x)$:

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln e$$
$$\Leftrightarrow x - 1 \leq e$$
$$\Leftrightarrow x \leq e + 1$$

منه إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	1		1 + e	
g'(x)		+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	1		1 + e		+∞
g'(x)		+	0	-	
g(x)	2	↗	2 + e	↘ 0 ↘	-∞

$$g(1+e) = 2(1+e) - e\ln(1+e-1) = 2 + 2e - e = 2 + e$$

2 ـــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تنعدم مرة واحدة فقط .

أي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

لدينا : $g(1+e) = 2 + e > 0$

و $g(1+e^3) = 2(1+e^3) - (1+e^3-1)\ln(1+e^3-1) = 2 + 2e^3 - e^3 \ln e^3 = 2 - e^3 < 0$

نتيجة : $\begin{cases} g \text{ مستمرة على } [1+e ; 1+e^3] \\ g(1+e)g(1+e^3) < 0 \end{cases}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α من المجال $[1+e ; 1+e^3]$ و هو المطلوب

منه إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	1		1 + e	α	1 + e³	+∞
g(x)		+		0	-	

3 ـــ لدينا :

$$\phi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$= \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

لاحظ أن على المجال $]1 ; +\infty[$ لدينا : $x^2 - 1 > 0$ إذن $x^2(x^2 - 1) > 0$

منه : إشارة $\phi'(x)$ هي إشارة $g(x^2)$ كمايلي :

لما $1 < x^2 < \alpha$ أي $1 < x < \sqrt{\alpha}$ فإن $g(x^2) > 0$ أي $\phi'(x) > 0$

لما $x^2 > \alpha$ أي $x > \sqrt{\alpha}$ فإن $g(x^2) < 0$ أي $\phi'(x) < 0$

نتيجة : ϕ متزايدة على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}[$

ϕ متناقصة على المجال $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ϕ تقبل قيمة حدية عظمى عند $x^2 = \alpha$ أي $x = \sqrt{\alpha}$

لأن $\phi'(\sqrt{\alpha}) = 0$ و قيمتها : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$

الجزء II :

1 ــ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $\phi(e^x) = \dfrac{\ln[(e^x)^2 - 1]}{e^x} = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

منه : $f(x) = \phi(e^x)$ و هو المطلوب .

2 ــ لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \phi(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \phi(e^x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \phi(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x + 1) + \ln(x - 1)}{x}$$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x - 1} \times \dfrac{x - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x - 1} \times 1 = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - 1)}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \dfrac{x + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

$= 0$

منه : $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} + \dfrac{\ln(x - 1)}{x}$

$= 0 + 0$

$= 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\ln(y^2 - 1)}{y} = 0$ (بوضع $y = e^x$)

3 ــ تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

لدينا $f(x) = \phi(e^x)$ إذن : $f'(x) = e^x \phi'(e^x)$

$$= e^x \left[\frac{g[(e^x)^2]}{(e^x)^2 [(e^x)^2 - 1]}\right]$$

$$= \frac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} g(e^{2x})$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(e^{2x})$ لأن $\dfrac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

كمايلي : $g(e^{2x}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leq \alpha$ حسب جدول إشارة $g(x)$

$\Leftrightarrow e^{2x} \leq e^{\ln\alpha}$

$\Leftrightarrow 2x \leq \ln\alpha$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}\ln\alpha$

منه :

x	0		$\frac{1}{2}\ln\alpha$	
$g(e^{2x})$		+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{2}\ln\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\phi(\sqrt{\alpha})$	↘	0

$$f\left(\frac{1}{2}\ln\alpha\right) = \phi(e^{\frac{1}{2}\ln\alpha}) = \phi(e^{\ln\sqrt{\alpha}}) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

4 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = \frac{1}{2}\ln\alpha = \ln(\alpha)^{1/2} = \ln\sqrt{\alpha}$

و قيمتها $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \phi(e^{\ln\sqrt{\alpha}})$

$$(\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

لكن $g(\alpha) = 0$

أي : $2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0$

منه : $2\alpha = (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1)$

أي : $\ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$

إذن : بالرجوع إلى المساواة (β) : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}{\sqrt{\alpha}}$

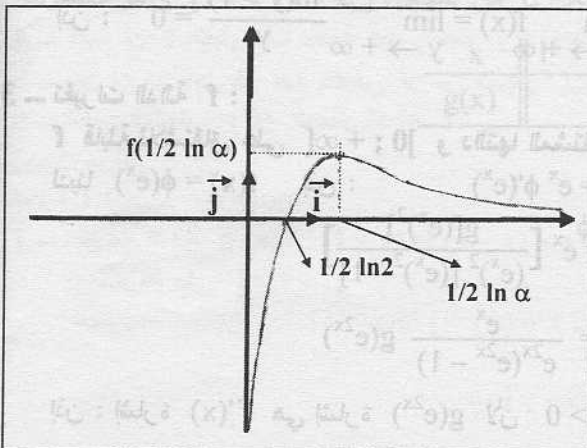
أي : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\sqrt{\alpha}\, 2\alpha}{\sqrt{\alpha}\,(\alpha - 1)}$

أي : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

نتيجة : القيمة الحدية العظمى للدالة f هي $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

منه : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$ و هو المطلوب

6 ـ الإنشاء :

لاحظ أن $\phi(\sqrt{\alpha}) > 0$ و الدالة f تنعدم من أجل $x = \frac{1}{2}\ln 2$

التمرين – 21

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k نعرف الدالة f_k على المجال $[0 ; +\infty[$ كمايلي :
$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ و نرمز بـ (C_k) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
لتكن g الدالة المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = \ln(x+1) - x$

1 – أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; +\infty[$

2 – إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي موجب a فإن : $\ln(a+1) \le a$

3 – أحسب $f_1'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة f_1

4 – بين أن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$: $f_1(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$

5 – أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ علما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

6 – أحسب $f_k'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة f_k

7 – بين أن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$: $f_k(x) = \ln(1 + k\frac{x}{e^x})$

8 – إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k

9 – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; +\infty[$: $f_k(x) \le \frac{k}{e}$

10 – أكتب معادلة مماس المنحنى (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و ليكن (T_k) هذا المماس .

11 – ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p < m$
أدرس الوضعية النسبية للمنحنين (C_m) و (C_p)

12 – أنشئ (C_1) و (T_1) ثم (C_2) و (T_2)

الحـل – 21

1 – تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; +\infty[$:

$$g(0) = \ln(0+1) - 0 = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) - x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)[0 - 1]$$
$$= -\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1\end{array}\right\}$

g قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1 - x - 1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

إذن : من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) \le 0$ لأن $\frac{-x}{x+1} \le 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$

2 – من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ فإن :
$g(x) \le 0$ أي $\ln(x+1) - x \le 0$ منه $\ln(x+1) \le x$

نتيجة : من أجل كل a من المجال $[0 ; +\infty[$: $\ln(a+1) \le a$

3 – لدينا : $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

منه : $f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1$

أي : $f_1'(x) = \dfrac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x}$

أي : $f_1'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x + x}$

منه : إشارة $f_1'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $1 - x$ لأن $e^x + x > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
1 - x		+	0	-	

منه : **جدول تغيرات الدالة f_1 على المجال $[0 ; +\infty[$**

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	0	↗	$\ln(e + 1) - 1$	↘	0

$f_1(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln(1) = 0$

$f_1(1) = \ln(e + 1) - 1$

ملاحظة : نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$ تحسب في السؤال 5 .

4 ـ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ لدينا :

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$$

$$= \ln\left[e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right] - x$$

$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x$$

$$= x + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x$$

$= \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$ و هو المطلوب .

5 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$= 0$ (يوضع في جدول التغيرات)

6 ـ لدينا : $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$

إذن : $f_k'(x) = \dfrac{e^x + k}{e^x + k\,x} - 1$

$$= \frac{e^x + k - e^x - k\,x}{e^x + k\,x}$$

$$= \frac{k(1 - x)}{e^x + k\,x}$$

منه : إشارة $f_k'(x)$ على $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $1 - x$ فقط لأن $k > 0$ و $(e^x + k\,x) > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
1 - x		+	0	-	

منه : **جدول تغيرات الدالة f_k على $[0 ; +\infty[$ كما يلي :**

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+k)-1$	$\searrow$	0

$f_k(0) = \ln(e^0 + k(0)) - 0 = \ln(1) = 0$

$f_k(1) = \ln(e^1 + k) - 1 = \ln(e + k) - 1$

ملاحظة : نهاية الدالة f_k عند $+\infty$ تحسب في السؤال 8

7 – من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$: $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$

$$= \ln\left[e^x\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)\right] - x$$

$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right) - x$$

$$= x + \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right) - x$$

$$= \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)$$ و هو المطلوب .

8 –

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(1)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} k = 0$

$= 0$ يوضع في جدول التغيرات

9 – حسب جدول تغيرات الدالة f_k فإن الدالة f_k تقبل قيمة حدية عظمى على $[0 ; +\infty[$

عند $x = 1$ و قيمتها : $f_k(1) = \ln(e + k) - 1$

أي : من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ $f_k(x) \le \ln(e + k) - 1$

أي : $f_k(x) \le \ln(e + k) - \ln(e)$

أي : $f_k(x) \le \ln\left(\frac{e + k}{e}\right)$

أي : $f_k(x) \le \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right)$

لكن حسب السؤال (2) فإن $\ln(a + 1) \le a$ أي $\ln\left(\frac{k}{e} + 1\right) \le \frac{k}{e}$

منه : $f_k(x) \le \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) \le \frac{k}{e}$

أي : $f_k(x) \le \frac{k}{e}$ و هو المطلوب .

10 – معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f_k'(0)\,x + f_k(0)$ حيث :

$$f_k'(0) = \frac{k(1 - 0)}{e^0 + k(0)} = k$$

$$f_k(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس (T_k) هي : $y = k\,x$

11 – ليكن $p > 0$ و $m > 0$ حيث $p < m$

$$f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + m\,x) - x - [\ln(e^x + p\,x) - x]$$

$$= \ln(e^x + m\,x) - \ln(e^x + p\,x)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x + m\,x}{e^x + p\,x}\right)$$

لندرس إذن إشارة $\ln\left(\frac{e^x + m x}{e^x + p x}\right)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

لاحظ أن $x > 0$ و $m > 0$ و $p > 0$ و $e^x > 0$

إذن : $e^x + m x > 0$ و $e^x + p x > 0$

منه :
$$\ln\left(\frac{e^x + m x}{e^x + p x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + m x}{e^x + p x} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow e^x + m x \geq e^x + p x$$
$$\Leftrightarrow m x \geq p x$$
$$\Leftrightarrow m x - p x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (m - p) x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \text{لأن} \quad m - p > 0$$

منه إشارة $f_m(x) - f_p(x)$ كمايلي :

x	0		$+\infty$
$f_m(x) - f_p(x)$	0	$+$	

نتيجة : إذا كان $m > p$ فإن : (C_m) و (C_p) يتقاطعان في النقطة $(0 ; 0)$، (C_m) يقع دائما فوق (C_p) من أجل $x \in]0 ; +\infty[$

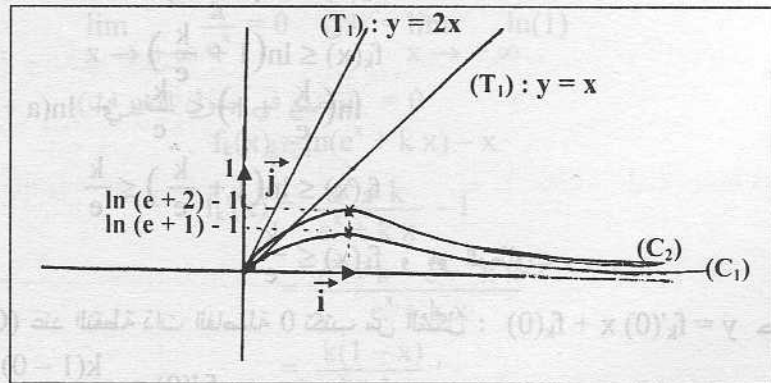
12 ــ الإنشاء :

لنرسم جدول تغيرات f_1 : (من أجل $k = 1$)

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	↗	$\ln(e + 1) - 1$	↘	0

لنرسم جدول تغيرات f_2 : (من أجل $k = 2$)

x	0		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	↗	$\ln(e + 2) - 1$	↘	0

منه الإنشاء التالي :

التمرين ــ 22

f دالة معرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$ بــ $f(x) = 1 + x\ln(x + 2)$ نسمي (C)

منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I :

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ من أجل كل x من المجال $]-2 ; +\infty[$

2 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f'

3 ــ بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-0,6 ; -0,5[$

4 ــ إستنتج إشارة $f'(x)$

5 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$

الجزء II :

ليكن x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2\,;+\infty[$ نسمي (T_0) مماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,;+\infty[$ نضع :

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

1 ــ تحقق ان : من أجل كل x من المجال $]-2\,;+\infty[$: $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

2 ــ باستعمال تزايد الدالة f' أعط إشارة $d'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة d على المجال $]-2\,;+\infty[$

3 ــ أدرس الوضعية النسبية لــ (C) بالنسبة الى (T_0)

الجزء III :

1 ــ عين معادلة المماس (T_0) من أجل $x_0 = 0$

2 ــ أوجد الأعداد الحقيقية x_0 التي تكون من أجلها مماسات المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تمر بمبدأ المعلم

3 ــ أرسم المنحنى (C) [نأخذ $\alpha = -0{,}54$ و $f(\alpha) = 0{,}8$]

الحـل ــ 22

الجزء I :

1 ــ
$$f'(x) = 1(\ln(x+2)) + \frac{x}{x+2} = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{x+2+2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

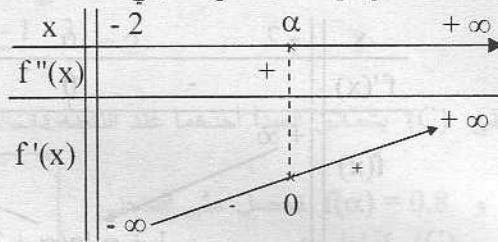
2 ــ لاحظ أن : $x > -2$ إذن : $x + 4 > 2$ و خاصة $x + 4 > 0$

منه : $f''(x) > 0$ من أجل كل x من $]-2\,;+\infty[$

أي : الدالة f' متزايدة تماما على $]-2\,;+\infty[$ كمايلي :

x	-2		α		$+\infty$
$f''(x)$			+		
$f'(x)$	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \ln(x+2) + \frac{-2}{x+2}$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y - \frac{2}{y} = -\infty \quad \text{لأن} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y = -\infty \\ \lim_{y \overset{>}{\to} 0} -2/y = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \ln(y) + 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$

$$= +\infty$$

(نضع النهايات في جدول التغيرات)

3 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة f' نستنتج أن
- f' مستمرة على $]-2\,;+\infty[$
- f' تأخذ قيم موجبة و سالبة
- f' متزايدة تماما .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-2\,;+\infty[$ حيث $f'(\alpha) = 0$

و لدينا :
$$f'(-0{,}6) = \ln(1{,}4) - \frac{0{,}6}{1{,}4} = -0{,}09$$

$$f'(-0{,}5) = \ln(1{,}5) - \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}07$$

إذن : f' مستمرة على $[-0,6 ; -0,5]$ و $f'(-0,6) \times f'(-0,5) < 0$

منه : يوجد α من المجال $]-0,6 ; -0,5[$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) يحقق $f'(\alpha) = 0$

4 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة f' نستنتج ما يلي :

x	-2	-0.6	α	-0,5	+∞
f'(x)		-	0	+	

5 ــ تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} 1 + x\ln(x+2) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} 1 - 2\ln(x+2) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} \ln(x+2) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x\ln(x+2) = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-2 ; +\infty[$ و $f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

و إشارة $f'(x)$ حسب السؤال (4) كمايلي :

x	-2		α		+∞
f'(x)		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	-2		α		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)	+∞	↘	$1 + \alpha\ln(\alpha+2)$	↗	+∞

$$f(\alpha) = 1 + \alpha\ln((\alpha+2)$$

الجزء II :

1 ــ $d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] \Rightarrow d(x) = f(x) - f'(x_0)x + \underbrace{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}_{\text{ثابت}}$

$\Rightarrow d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ و هو المطلوب

2 ــ بما أن الدالة f' متزايدة تماما على $]-2 ; +\infty[$ فإن : يكون $f'(x) - f'(x_0)$ موجب إذا و فقط إذا كان $x \geq x_0$ منه جدول الإشارة التالي :

x	-2		x_0		+∞
d'(x) = f'(x) − f'(x₀)		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة d كمايلي :

x	-2		x_0		+∞
d'(x)		-	0	+	
d(x)		↘	0	↗	

$$d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0) . x_0 + f'(x_0) . x_0 - f(x_0) = 0$$

إذن : الدالة d تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-2 ; +\infty[$ و قيمتها 0 $d(x_0) = 0$

منه : من أجل كل x من $]-2 ; x_0[\cup]x_0 ; +\infty[$ فإن $d(x) > 0$

أي : المنحنى (C) يقع دائما فوق المماس (T_0) من أجل $x \in]-2 ; x_0[\cup]x_0 ; +\infty[$

ماعدا عند النقطة $(x_0 ; f(x_0))$ حيث المماس و المنحنى (C) يشتركان في هذه النقطة .

الجزء III :

1 ـ من أجل $x_0 = 0$ معادلة (T_0) هي : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \ln 2 \end{cases}$

أي معادلة (T_0) : $y = x \ln 2 + 1$

2 ـ **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تكتب من الشكل :**

$$y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$$

أي $$y = f'(x_0) . x - f'(x_0) . x_0 + f(x_0)$$

إذن : يكون المماس يشمل المبدأ إذا و فقط إذا كان : $- f'(x_0) . x_0 + f(x_0) = 0$

إذن نحل في $]-2 ; +\infty[$ المعادلة $f(x) - x f'(x) = 0$ كمايلي :

$$f(x) - x f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln(x+2) - x\left[\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + x\ln(x+2) - x\ln(x+2) - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x+2} = 0$$

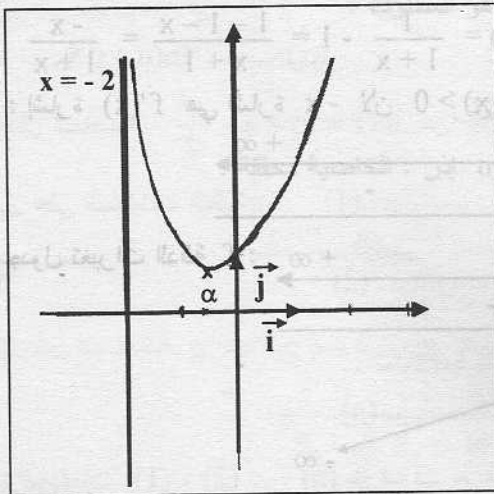
$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$ معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول x :

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى (C) يشملان المبدأ أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1- و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة 2

3 ـ الإنشاء :

من أجل $\alpha = -0,54$ و $f(\alpha) = 0,8$ نحصل على المنحنى (C) كمايلي :

__التمرين ـ 23__

f و g دالتان معرفتان على $[0 ; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \ln(1+x) - x$ و $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

1 ـ أدرس تغيرات كل من f و g على المجال $[0 ; +\infty[$

2 ـ إستنتج أن من أجل كل $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

لتكن $(u_n)_{n>0}$ متتالية معرفة بـ $u_1 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 ـ برهن بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

4 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نضع :

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n} \\ T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{4^n} \end{array}\right\}$$

5 ــ بين أن : $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

6 ــ أحسب S_n و T_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

7 ــ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

8 ــ إستنتج أن (u_n) متقاربة و لتكن ℓ نهايتها .

9 ــ نقبل أن إذا كانت (v_n) و (w_n) متتاليتان متقاربتان حيث $v_n \leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

بين إذن أن $5/6 \leq \ln \ell \leq 1$

الحــل ــ 23

1 ــ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[\frac{\ln(1 + x)}{1 + x} - \frac{x}{1 + x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x)(0 - 1)$$

$$= -\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} = 1 \end{array}\right\}$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{1 - 1 - x}{x + 1} = \frac{-x}{1 + x}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-x$ لأن $(1 + x) > 0$ على المجال $[0 ; +\infty[$

أي :

x	0	$+\infty$
$-x$	0	$-$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; +\infty[$

$$g(0) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[\frac{\ln(1 + x)}{1 + x} - \frac{x}{1 + x} + \frac{x^2}{2(1 + x)}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[-1 + \frac{x^2}{2x}\right]$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} = 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x)\left(-1 + \frac{1}{2} x\right)$$

$$= +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$$
$$= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x}$$
$$= \frac{x^2}{1+x}$$

إذن : $g'(x) \geq 0$ من أجل $x \in [0 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

2 ـ من جدول تغيرات الدالتين f و g نستنتج مايلي :

من أجل كل $x \in [0 ; +\infty[$: $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \ln(1+x) - x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \ln(1+x) \leq x \\ \ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

أي : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ و هو المطلوب .

3 ـ **البرهان بالتراجع أن : من أجل كل $n \in IN^*$: $u_n > 0$**

من أجل $n = 1$: $u_1 = 3/2$ و $3/2 > 0$ إذن : الخاصية محققة .

من أجل $n = 2$: $u_2 = u_1\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{8}$ إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن $u_n > 0$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $\begin{cases} u_n > 0 \\ \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0 \end{cases}$ إذن : $u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN^* : $u_n > 0$

4 ـ **البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n من IN^* :**

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

من أجل $n = 1$ لدينا $\ln(u_1) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$ إذن : الخاصية صحيحة .

من أجل $n = 2$: لدينا $\ln(u_2) = \ln(15/8)$

و $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{5}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{15}{8}\right)$

منه : $\ln(u_2) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right)$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن : من أجل $n > 2$ $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

هل $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ؟

لدينا : $\ln(u_{n+1}) = \ln\left[u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$

$$= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $(n + 1)$

نتيجة : من أجل كل n من IN^* : $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

5 ـ باستعمال الخاصية $\ln(1 + x) \leq x$ من أجل $x \in \{1/2 ; 1/2^2 ; \ldots. 1/2^n\}$ نحصل على المتباينات التالية :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\vdots$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) ... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$$

أي : $(\alpha)\ldots\ldots\ldots \ln(u_n) \leq S_n$

باستعمال الخاصية $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ من أجل $x \in \{1/2 ; 1/2^2 ; \ldots. 1/2^n\}$

نحصل على المتباينات التالية :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \geq \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\vdots$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) .... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \geq \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right] + \ldots. + \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right]$$

أي : $\ln(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots. + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right]$

أي : $\ln u_n \geq S_n - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

أي : $(\beta)\ldots\ldots\ldots \ln u_n \geq S_n - \frac{1}{2} T_n$

نتيجة : من المتباينتان (α) و (β) نستنتج أن :

$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ و هو المطلوب

6 ـ S_n هو مجموع n حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/2$

و حدها الأول $1/2$ منه

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{(1/2)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right)$$

أي :

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{(1/2)^n - 1}{-1/2} \right)$$

أي :

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

T_n هو مجموع n حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/4$ و حدها الأول $1/4$ منه :

$$T_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{(1/4)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right)$$

أي :

$$T_n = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) \times \frac{-4}{3}$$

أي :

$$T_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

إذن :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$$

7 ـ

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$$

$$= u_n\left[1 + \frac{1}{2^{n+1}} - 1\right]$$

$$= u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

بما أن $u_n > 0$ من أجل كل $n \in IN^*$ و $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$

فإن $u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متتالية متزايدة تماما .

8 ـ لدينا من أجل كل n من IN^* :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

منه :

$$e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

أي المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـــ e^{S_n}

نتيجة : (u_n) متزايدة تماما و (u_n) محدودة من الأعلى

إذن : (u_n) متتالية متقاربة :

9 ـ لتكن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

لدينا :

$$e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

منه :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} e^{S_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} T_n = 1/3$$ لأن

أي : $e^{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} \leq \ell \leq e^1$

أي : $e^{5/6} \leq \ell \leq e^1$

منه : $5/6 \leq \ln \ell \leq 1$ و هو المطلوب.

التمرين ــ 24

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty ; 1[$ بـ $g(x) = (1-x)e^x - 1$

2 ــ إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in]-\infty ; 1[$

3 ــ بين أن : من أجل كل x من المجال $]-\infty ; 1[$: $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty ; 1[$ بـ $f(x) = e^x + \ln(1-x)$ نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; 1[$

5 أرسم المنحنى (C)

الحـل ــ 24

1 ــ g معرفة على IR خاصة على $]-\infty ; 1[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1-x)e^x - 1 = \lim_{x \to -\infty} e^x - xe^x - 1 = -1$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)e^x - 1 = (1-1)e^1 - 1 = -1$$

g قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = -1(e^x) + e^x(1-x) = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x$$

منه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$ لأن $e^x > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		1
$-x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-1	↗ قيم سالبة	0	↘ قيم سالبة	-1

$$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		1
$g(x)$		-	0	-	

3 ــ حسب جدول تغيرات الدالة g فإن من أجل كل x من المجال $]-\infty ; 1[$:

أي $g(x) \leq 0$ ، $(1-x)e^x - 1 \leq 0$

منه : $(1-x)e^x \leq 1$

منه : $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ و هو المطلوب . (لأن $1 - x > 0$)

4 ــ تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; 1[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = +\infty$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} e^x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} e^1 + \ln y$$

$$= -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x} = \frac{(1-x)e^x - 1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$$

منه : إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty ; 1[$ هي إشارة $g(x)$ فقط لأن $(1-x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

$$f(0) = e^0 + \ln(1-0) = 1$$

5 ـ الإنشاء :

الفهرس

TEL : 0773 26 52 81